

I.

1°) on trouve $\alpha = 1, \beta = 0$: $x = e^{-t}, y = 0$ $\leftarrow (3)$

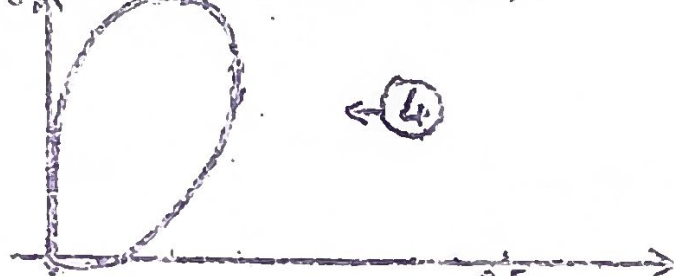
2°) $y' = -x - y + e^{-t}, y = x' + x$ or $x'' = -x' + y' \Rightarrow x'' + 2x' + 2x = e^{-t}$ $\leftarrow (1)$

d'où : $x = e^{-t} [\alpha \cos t + \beta \sin t + 1]; y = x' + x = e^{-t} [-\alpha \sin t + \beta \cos t]$ $\leftarrow (4)$

3°) $x_0(t) = e^{-t} [1 - \cos t], y_0(t) = e^{-t} \sin t$ $\leftarrow (2)$

4°) a) $x'(t) = e^{-t} [-1 + \cos t + \sin t]$

$y'(t) = e^{-t} [-\sin t + \cos t]$



t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$5\pi/4$	2π
x'	0	+	+	-	-
x	0	0,134	0,208	0,134	0
y	0	0,208	0,208	0,134	0
y'	+	0	-	-	+

b) $x_0(t+2\pi) = e^{-2\pi} x_0(t)$ et $y_0(t+2\pi) = e^{-2\pi} y_0(t)$, d'où C se déduit

de C_0 par des homothéties de centre 0 et de rapport $e^{-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ $\leftarrow (2)$

II

1°) a) On trouve : $(F_n): Y'' - 2x Y' + 2n Y = 0$ $\leftarrow (5)$

b) $Y = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + o(x^p)$

$Y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + (p+1)a_{p+1} x^p + o(x^p)$

$Y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + (p+2)(p+1)a_{p+2} x^p + o(x^p)$

coef. de x^p dans la 1^{re} membre de $(F_n): 2(n-p)a_p + (p+1)(p+2)a_{p+2} = 0$

d'où : $a_p = -2 \frac{(n-p+2)}{p(p+1)} a_{p+2}$ $\leftarrow (4)$ (R)

c) la relation ci-dessus appliquée à $p=n+2 \Rightarrow a_{n+2} = 0$ et par récurrence

$a_{n+2k} = 0$; si de plus $a_{n+1} = 0$, on a aussi : $a_{n+2k+1} = 0$ $\leftarrow (2)$

Si on choisit $a_n = 2^n$ et $a_{n+1} = 0$, la relation (R) permet de calculer les coef. d'un polynôme H_n (de même parité que n) ($a_{n-3} = 0$ etc., $a_{n-2} = -n(n-1)2^{n-2}$)

D'autre part, en reportant H_n dans (F_n) et en examinant les coef. du terme de degré p ($p \in [0, n]$), on trouve 0, donc H_n vérifie (F_n) $\leftarrow (4)$

2°) a) On sait que $H_n'' - 2x H_n' + 2n H_n = 0$, si on dérive, on trouve

$(H_n')'' - 2x (H_n')' + 2(n-1) H_n' = 0$ i.e. H_n' vérifie F_{n-1} $\leftarrow (3)$

b). i) l'ensemble des solutions polynomiales de (F_{n-1}) est défini à une constante α près (choix de a_{n-1}) ($\Rightarrow$ e.v. de dim 1) donc $H_{n-1} = k \cdot H_{n-1}'$

Le coef. du terme de degré $n-1$ est 2^{n-1} pour H_{n-1} , et $n \cdot 2^n$ pour $H_{n-1}' \Rightarrow k = \frac{1}{2n}$

d'où : $H_{n-1} = \frac{1}{2n} H_{n-1}'$ $\leftarrow (4)$

(i) $H_{n-2} = \frac{1}{2(n-1)} H_{n-1}' = \frac{1}{4n(n-1)} H_n'' \Rightarrow 2n(n-1) H_{n-2} - 2x H_{n-1}' + H_n = 0$ $\leftarrow (2)$

3°) a) $H_1(x) = 2x \Rightarrow y_1 = e^{-x^2/2} H_1$, puis on trouve (cf cours) : $\frac{T''}{T} = -2 \frac{y_1'}{y_1}$

$\Rightarrow T' = C y_1^{-2} = \frac{C}{4} \frac{e^{x^2}}{x^2}$ i.e. $T = \lambda I(x) + \mu$

d'où : $y = \lambda \cdot 2x e^{-x^2/2} I(x) + \mu 2x e^{-x^2/2}$ $\leftarrow (4)$