

II -

Corrigé du D.S.

1° a) On pose: $f_a(t) = \frac{t \operatorname{Arctg}(\frac{1}{t})}{(t^2+x^2)^a}$: $f_a(0)=0$ et $f_a(t) \sim \frac{1}{t^{2a}} \Rightarrow$ C si $a > \frac{1}{2}$

b) $h(x) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x^2)(1+t^2)} + \frac{\pi}{4x^2}$ après une intégration par parties.

si $x^2 \neq 1$:
$$\frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)} = \frac{1}{(1-x^2)(t^2+x^2)} + \frac{1}{(x^2-1)(t^2+1)} \Rightarrow h(x) = \frac{\pi}{4x^2(1-x^2)} \quad (1)$$

si $x=1$: $h(1) = \frac{\pi}{8}$

Donc, (1) nous donne la valeur de $h(x)$ si $x > 0$. Or, comme $h(x)$ est paire on peut affirmer que: si $x < 0$: $h(x) = h(-x) = \frac{\pi}{4x^2(1-x^2)}$

2° a) Pour $u > 0$ on a: $\operatorname{Arctg} u > 0$.

En étudiant les variations de $d(u) = u - \operatorname{Arctg} u$, on en déduit: $u > \operatorname{Arctg} u$.

Donc $g(x) > 0$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} \operatorname{Arctg} \frac{1}{t} dt < \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+x^2} = \frac{\pi}{2x}$.

En appliquant le Th. des "gendarmes", on en déduit que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

b) Si $t \in]0, 1]$, alors $\operatorname{Arctg} \frac{1}{t} \geq \frac{\pi}{4}$ donc: $\int_0^1 \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{t^2+x^2} dt > \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{t dt}{t^2+x^2} = \frac{\pi}{8} \ln \frac{x^2+1}{x^2}$
 inégalité stricte si $t \neq 1$

Or: $g(x) > \int_0^1 \frac{t \operatorname{Arctg} \frac{1}{t}}{t^2+x^2} dt > \frac{\pi}{8} \ln \frac{x^2+1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$

3° Si $g'(x) = -\frac{\pi}{2(1+x).x}$ alors: $g(x) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+x}{x} + C$ mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Comme g est paire, on en déduit son expression sur $\mathbb{R}^*$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1+\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} \ln(1-\frac{1}{x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En 0, on a: $g(x) \sim -\frac{\pi}{2} \ln|x|$ et en $\pm \infty$: $g(x) \sim \frac{\pi}{2|x|}$

II 1° $\mathcal{D}_\ell =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$ puis $R'(x) = \frac{\pi}{2x(1-x)^2} x$

D'où le tableau

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$R'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$R(x)$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	0

$x_0 \approx 0,308233705$

2° ℓ est continue en 0. On a: $\ell'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3} g(x) + \frac{x}{(1+x)^2} g'(x) = \frac{-1+x}{(1+x)^3} R(x)$

x	$-\infty$	-1	0	x_0	$+\infty$
$\ell'(x)$	$-$	$+$	$+$	0	$-$
$\ell(x)$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\ell(x_0)$	0

$\ell(x_0) \approx 0,41$

en $+\infty$: $\ell(x) \sim \frac{\pi}{2x^2}$

en $-\infty$: $\ell(x) \sim -\frac{\pi}{2x^2}$

