

Corrigé du devoir surveillé.

Exercice 1:

1°. Si on pose $F(x, y) = X(x, y) + i Y(x, y)$, on reconnaît la dérivée selon le vecteur $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$; comme F est différentiable, on prouve ainsi que $A_\theta(d)$ admet une limite: $B(\theta) = e^{i\theta} dF_{(x,y)}(e^{i\theta}) = e^{i\theta} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \sin\theta \right)$ d'où $B(\theta) = e^{i\theta} ((a+ic)\cos\theta + (b+id)\sin\theta) \mathbb{R}$

$$B(\theta) = \frac{a+d}{2} \cos 2\theta + \frac{a+d}{2} + \frac{b+c}{2} \sin 2\theta + i \left[\frac{c-b}{2} \cos 2\theta + \frac{c+b}{2} + \frac{a-d}{2} \sin 2\theta \right]$$

2°. On reconnaît les équations paramétriques d'un cercle de centre $\frac{a+d}{2}, \frac{c-b}{2}$ et de rayon $\sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2}$

3°. $\sin \tilde{z} = \sin(x-iy) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$ d'où:

$$a = \cos x_0 \cosh y_0, b = \sin x_0 \sinh y_0, c = -\sinh y_0 \sin x_0, d = -\cosh y_0 \cos x_0.$$

centre: 0

de rayon

$$\sqrt{\sinh^2 y_0 + \cosh^2 x_0}$$

Exercice 2:

1°. En posant $y = tx$, on trouve $x^x = (tx)^t \cdot (t^t)^{1/t}$ en prenant la racine x^{1-t} : $x^{1-t} = t^t$ i.e. $x = t^{t/(1-t)}$ et $y = t^{1/(1-t)}$

On remarque que $x(1/t) = y(t)$ et $y(1/t) = x(t)$, il suffit donc d'étudier les limites de $y(t)$ quand $t \rightarrow 0^+$ et $t \rightarrow +\infty$.

On trouve $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$ d'où $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = (1, 0)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = (0, 1)$
 $\ln y = \frac{\ln t}{1-t} \sim -1$ car $\ln t = \ln(1+(t-1)) \sim t-1$ donc $\lim_{t \rightarrow 1} y(t) = 1/2$ et on peut conclure: $\lim_{t \rightarrow 1} H(t) = (1/2, 1/2)$.

2°. Compte tenu de la remarque ci-dessus on peut affirmer que $\tilde{C}$ est symétrique / à la 1^{ère} bissectrice et il suffit d'étudier la courbe pour $t \in]0, 1[$.

$x'(t) = -\frac{1}{t^2} y'(1/t)$ étudions les variations de $y'(t) = y(t) \left[\frac{1}{t(1-t)} + \frac{\ln t}{(1-t)^2} \right] = \frac{y(t)}{(1-t)^2} R(t)$
 $R'(t) = \frac{t-1}{t^2}$:

t	0	1	+ ∞
R'	-	0	+

 d'où: $y'(t) > 0$ et $x'(t) < 0$
 $R(t) > 0$.

t	0	1
x'	-	-
y'	+	+

 $\Rightarrow$ tableau de variation.

tangentes: en R: $t \rightarrow 1$: $\lim_{t \rightarrow 1} x'(t) = -\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^2} y'(t) = -\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{t^2} R(t)$
 mais, $y'(t) \rightarrow \infty$!

Etudié délicat: $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} \cdot \frac{\frac{1-t}{t} + \ln t}{1-t + \ln t} \sim \frac{-\frac{1}{1-t} + \ln(1+T)}{-T + \ln(1+T)} \cdot \frac{y}{x}$
 et après un D.L. à l'ordre 2

$\frac{y'}{x'} \sim 1$, on trouve en 0: $\frac{y'}{x'} \rightarrow -\infty$ d'où:

