# Corrigé du devoir.

## EXERCICE 1 :

1°). Solutions de l'équation homogène : $\lambda e^{-4x} + \mu e^{+2x}$. ← 2

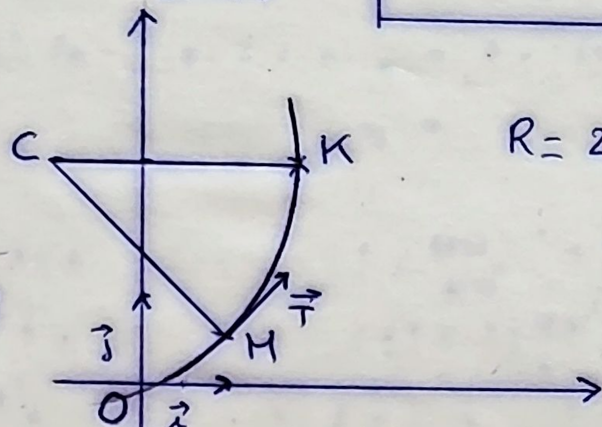
Solution particulière : $y_0 = -\dfrac{1}{2x}$. ← 6

2°). $R = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ : $y' = \lambda$ et $y'' = -2\lambda + 2$ (en utilisant l'équa diff.)

$$\Rightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix} \quad R\vec{N} = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda(1+\lambda^2)}{2(1-\lambda)} \\ \frac{1+\lambda^2}{2(1-\lambda)} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{(U) \begin{cases} x = \dfrac{-\lambda^3+\lambda-2}{2(1-\lambda)} \\ y = \dfrac{\lambda^2-\lambda+2}{2(1-\lambda)} \end{cases}}$$ ← 8

## PROBLEME 1 :

1°).




$R = 2\sqrt{2}$ $\quad y' = 1 \Rightarrow \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

2°). $\vec{OK} = \vec{OM} + \vec{MC} + \vec{CK}$

$= \vec{OM} + R\vec{N} + R.\vec{U}$ ← 4

$$\frac{d\vec{K}}{ds} = \vec{T} + R.\frac{d\vec{N}}{ds} + \frac{dR}{ds}\vec{N} + \frac{dR}{ds}\vec{U} + R.\frac{d\vec{U}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{ds}\cos\alpha + \frac{d\vec{N}}{ds}\sin\alpha + \vec{V}\frac{d\alpha}{ds} = \left(\frac{1}{R} + \frac{d\alpha}{ds}\right)\vec{V} \; ; \; \vec{N} = \vec{U}\sin\alpha + \vec{V}\cos\alpha \; ; \; \vec{T} + R\frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{K}}{ds} = \vec{U}.\frac{dR}{ds}(1+\sin\alpha) + \vec{V}\left(R\frac{d\alpha}{ds} + \frac{dR}{ds}\cos\alpha + 1\right)$$

K décrit une trajectoire $\perp$ à la famille des cercles de courbure $\Leftrightarrow \frac{d\vec{K}}{ds} = \lambda\vec{U}$

$\Leftrightarrow R\dfrac{d\alpha}{ds} + \dfrac{dR}{ds}\cos\alpha + 1 = 0$. ← 8

3°). On a : $R = e^{\theta}\sqrt{2}$, $ds = e^{\theta}\sqrt{2}\,d\theta \Rightarrow$ 1 $\Leftrightarrow \cos\alpha + \dfrac{d\alpha}{d\theta} + 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d\alpha}{d\theta} = -(1+\cos\alpha)$

$\Leftrightarrow \underline{\alpha = -2\,\mathrm{Arctg}(\theta - \theta_0)}$ ← 4

4°). $s = \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctg}\, s + k\pi \Rightarrow d\alpha = \dfrac{2\,ds}{1+s^2}$.

$\Rightarrow \cos\alpha = \sin(2\,\mathrm{Arctg}\, s) = \dfrac{2s}{1+s^2} \Rightarrow$ 1 $\Leftrightarrow \dfrac{dR}{ds}\dfrac{2s}{1+s^2} + R\dfrac{2}{1+s^2} + 1 = 0$ 2.

2 $\Leftrightarrow$ 3 $(s \neq 0)$ : $s.\dfrac{dR}{ds} + R = -\dfrac{s^2+1}{2}$. ← 4

équation homogène : $R = \dfrac{\lambda}{s}$ ; sol. particulière : $R = -\dfrac{s^2+3}{6}$

Pas d'inflexion $\Leftrightarrow R \not\to \infty \Leftrightarrow \lambda = 0$ i.e. $R = -\dfrac{s^2+3}{6} = \dfrac{ds}{d\alpha}$.

$\dfrac{ds}{s^2+3} = -\dfrac{1}{6}d\alpha \Rightarrow \alpha = -2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\dfrac{s}{\sqrt{3}}$ (en prenant une constante d'intégration nulle).

$$\Rightarrow \boxed{x = \int\cos\left(2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\frac{s}{\sqrt{3}}\right)ds \quad \text{et} \quad y = -\int\sin\left(2\sqrt{3}\,\mathrm{Arctg}\frac{s}{\sqrt{3}}\right)ds}$$ ← 4

## PROBLEME 2 :

I. 1°). $\underline{\Delta'(z_1, z_2)(x) = 0 \Rightarrow \Delta \text{ constant}}$ ; l'équivalence est immédiate ← 2

2°). On cherche $z$ sol. de 2 $\Rightarrow z = \lambda z_1 + \mu z_2$ vérifiant :

$z(a) = \lambda z_1(a) + \mu z_2(a) = 0$

$z(b) = \lambda z_1(b) + \mu z_2(b) = 0$. si $\begin{vmatrix} z_1(a) & z_2(a) \\ z_1(b) & z_2(b) \end{vmatrix} \neq 0$ : 1 seule sol. : $z = 0$ ← 3

sinon : une infinité de solutions.