

III. 1°/ a). Résultat démontré en cours.

$$b) \int_0^x |u(t) \cdot v(t)| dt \leq \sqrt{\int_0^x u^2(t) dt} \times \sqrt{\int_0^x v^2(t) dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} u^2(t) dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} v^2(t) dt} = A$$

$I(x)$ est bornée et c'est l'intégrale d'une fct. $\geq 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} |u(t) \cdot v(t)| dt$ converge.

Comme: $\left| \int_0^{+\infty} u(x) \cdot v(x) dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |u(x) \cdot v(x)| dx \leq A$, en élevant au carré, on trouve bien l'inégalité demandée.

c) On admet que L^2 est l.e.v.. $B(u, v)$ est bilinéaire, symétrique, positive, montrons qu'elle est définie: si: $\int_0^{+\infty} u^2(t) dt = 0$ alors $\forall x, \int_0^x u^2(t) dt = 0$ et comme u est continue $\Rightarrow \forall x > 0, \forall t \in [0, x], u(t) = 0 \Rightarrow u = 0$ sur $\mathbb{R}^+$.

L^2 ici est pré-hilbertien (i.e. e.v. de dim. ∞ sur lequel on a défini un produit scalaire).

2°/ a). $J_a(x)^2 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+x^2)^a} dt \cdot \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ (en vertu du 1° b) comme $a > 3/2$, et que $\frac{t^2}{(t^2+x^2)^a} \sim \frac{1}{t^{2a-2}}$ les intégrales ci-dessus convergent, donc $J_a(x)$ converge ($x \neq 0$)

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4x} \quad \text{d'où} \quad j(x)^2 \leq \frac{\pi}{4x} \cdot f \# f.$$

$$c) |j(x+h) - j(x)| = \left| \int_0^{+\infty} t f(t) \left(\frac{1}{t^2+(x+h)^2} - \frac{1}{t^2+x^2} \right) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{t f(t) x (-h(2x+h))}{(t^2+x^2)(t^2+(x+h)^2)} dt \right|$$

$$\leq |h(2x+h)| \times \int_0^{+\infty} \frac{t |f(t)|}{t^2+x^2} \times \frac{1}{t^2+(x+h)^2} dt \quad \text{donc, il suffit de majorer}$$

$\frac{1}{t^2+(x+h)^2}$ par $\frac{4}{x^2}$; or: $x+h > \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow t^2+(x+h)^2 > \frac{x^2}{4}$ cqfd.

Démonstration de la continuité de j : $x > 0$, on prendra h suffisamment petit

pour que: $-\frac{x}{2} < h < \frac{x}{2}$; l'inégalité démontrée nous permet d'affirmer que j est continue en x si $x > 0$. Comme j est paire, j est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3°/ Il faut tout d'abord montrer que i est continue en 0:

$$\text{Or: } i(x)^2 = \frac{x^2}{(1+x)^4} \cdot j(x)^2 \leq \frac{\pi x}{4(1+x)^4} f \# f \quad \text{donc, } \lim_{x \rightarrow 0} i(x)^2 = 0 : \underline{i(x) \text{ est continue en } 0}.$$

Comme: $\int_0^{+\infty} \frac{\pi x}{4(1+x)^4} dx$ converge, alors, on en déduit que $i \in L^2$, d'autre part:

$$\int_0^{+\infty} i(x)^2 dx \leq \frac{\pi}{4} \cdot f \# f \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^4} = \frac{\pi}{24} f \# f$$