

Problème :

Test l'intérieur d'un triangle de sommets : $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ et Δ est un tétraèdre qui a pour sommets ceux de T et l'origine.

I. 17. On prend $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ $AM = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{pmatrix}$ pour les conditions : $x, y, z \geq 0$ et $x+y+z=1$

$x, y, z \geq 0$ ce qui donne : $a_i \geq 0, b_i \geq 0, c_i \geq 0$ et $\sum a_i = \sum b_i = \sum c_i = 1$; on a évidemment équivalence.

Comme $x, y, z \geq 0$ et $x+y+z \leq 1$ alors $\hat{A}(\Delta) \subset \Delta$

27. Pour que $A \in \mathcal{Q}$, il faut que les 3 vecteurs colonnes forment l.b.o.n. (c'est-à-dire une C.V.S.) i.e. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \Rightarrow$ 1 seul est égal à 1, les autres sont nuls $\Rightarrow$ 6 matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sym. / plan } y=z \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sym. / plan } x=z$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sym. / plan } y=x \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ rotations d'angle } \pm 2\pi/3 / \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{Q}$ est un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$ car c'est l'intersection de 2 sous-groupes de $GL_3(\mathbb{R})$.

II. 10. On a $\hat{A}(T) = \frac{1}{4}T$

27. On trouve $x_n - y_n = \frac{1}{4}(x_{n-1} - y_{n-1}) = \frac{1}{4^n}(x_0 - y_0)$, donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$, de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - z_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - z_n) = 0$; on ne peut ici conclure à l'existence de $\lim x_n$ etc..., mais : $x_n + y_n + z_n = 1$ et $x_n - y_n = \frac{1}{4^n}(x_0 - y_0)$, $y_n - z_n = \frac{1}{4^n}(y_0 - z_0)$ d'où : $y_n = \frac{1}{4^n} \left(\frac{y_0 - z_0}{2} + \frac{1}{2} \right)$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = (1/3, 1/3, 1/3)$.

37. Calculons X_n , l'abscisse de K_n : $X_n = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^n (4/5)^m + (x_0 - 1/3) \sum_{m=0}^n (1/5)^m$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = \frac{1}{3} \frac{1}{1-4/5} + \frac{(x_0 - 1/3)}{1-1/5} = \frac{5}{3} + \frac{5}{4}x_0$. donc, si on pose $L = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 5/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ alors :

$K(M_0) = L + \frac{5}{4} \vec{OM_0}$ i.e. $K(M_0)$ décrit un triangle qui se déduit de T par une homothétie de rapport $5/4$ et de centre $\Omega / \vec{O\Omega} = -4\vec{OL}$.

III. 10. On a : $X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ etc..., déterminons $g(T)$:

$X^2 + Y^2 + Z^2 - X - Y - Z = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2} = 0$ donc, $g(T) \subset$ sphère passant par O et les 3 p^2 de coordonnées $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. En fait, $g(T) = S_{1/2}$ & l'arc d'arcos défini par $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

27. f différentiable sur E , existant (D.P. continues) $M_2 = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \begin{pmatrix} -2xy & -2xz & -2yz \end{pmatrix}$ si on prend $(x, y, z) = (1, 0, 0)$: $df_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sym / yo_z .

37. On a : $M_2 = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, P ou P est une matrice orthogonale ($P^t = P$) et si l'on résout l'équation $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on trouve $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ donc P est une sym. $\perp$ / Plan : $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.