

II. 1°. z solution de ① s'exprime de la façon suivante : $z = y_0 + \lambda z_1 + \mu z_2$. ← ④

On cherche λ et μ pour que : $\begin{cases} \lambda z_1(a) + \mu z_2(a) = -y_0(a) \\ \lambda z_1(b) + \mu z_2(b) = -y_0(b) \end{cases}$ ce système a une solution et une seule si $\begin{vmatrix} z_1(a) & z_2(a) \\ z_1(b) & z_2(b) \end{vmatrix} \neq 0$

2°. $\begin{cases} z_3' = \lambda z_1 + \mu z_2 \\ z_4 = \nu z_1 + \delta z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_3(a) = 0 \Leftrightarrow \lambda z_1(a) + \mu z_2(a) = 0 \text{ et } (z_1(a), z_2(a)) \neq (0, 0) \\ z_4 = \nu z_1 + \delta z_2 \end{cases} \Rightarrow \{z_3\}$: e.v. de dim. 1 ; de même pour $\{z_4\}$.

* sinon : $z_1(a)z_2(b) - z_2(a)z_1(b) = 0$.

Si $\{z_3, z_4\}$ liée : par exemple : $z_4 = \alpha z_3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda z_1(a) + \mu z_2(a) = 0 \quad (\lambda, \mu) \neq 0 \text{ ce qui} \\ \alpha(\lambda z_1(b) + \mu z_2(b)) = 0 \text{ est impossible vu} \end{cases}$ le I. 2°) donc $\{z_3, z_4\}$ base de G . ← ④

3°. $\Delta(z_3, z_4)(x) = -z_3'(a)z_4(a) = z_3(b)z_4'(b)$ (évident). ← ②

Comme $\{z_3\}$ est 1 e.v., on peut choisir z_3 à une constante multiplicative près et avoir $\Delta(z_3, z_4)(x) = 1$.

4°. a). $x \leq t : \frac{\partial G}{\partial x} = z_3'(x)z_4(t) ; x > t : \frac{\partial G}{\partial x} = z_3(t)z_4'(x)$. ← ④

et $\frac{\partial G}{\partial x}(t+0, t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t-0, t) = \Delta(z_3, z_4)(t) = 1$

b). si $x < t : \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = z_3''(x)z_4(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + g(x) \cdot G(x, t) = 0$; idem si $x > t$ ← ②

c). $G(a, t) = G(b, t) = 0$. ← ③

d). $W(x) = \int_a^x G(x, t)f(t)dt + \int_x^b G(x, t)f(t)dt = z_4(x) \int_a^x z_3(t)f(t)dt + z_3(x) \int_x^b z_4(t)f(t)dt$

$W'(x) = z_4'(x) \int_a^x z_3(t)f(t)dt + z_3'(x) \int_x^b z_4(t)f(t)dt + z_4(x)z_3(x)f(x) - z_3(x)z_4(x)f(x)$

$W''(x) = z_4''(x) \int_a^x z_3(t)f(t)dt + z_3''(x) \int_x^b z_4(t)f(t)dt + [z_4'(x)z_3(x) - z_3'(x)z_4(x)]f(x)$

Or : $z_4'' = -g \cdot z_4$ et $z_3'' = -g \cdot z_3 \Rightarrow W$ sol. de ①. ← ⑥

$W(a) = W(b) = 0$ (évident).

III. 1°) équation ② : $y'' - a^2 y = 0 \Rightarrow \boxed{z_1 = e^{ax} \quad z_2 = e^{-ax}}$

Or : $z_1(0) \cdot z_2(1) - z_2(0) \cdot z_1(1) = e^{-a} - e^a \neq 0$, donc, en vertu du II. 1°, on sait

que ⑨ admet une seule solution vérifiant ⑩. ← ④

2°. $G(x, t)$: On peut prendre $z_3(x) = \frac{\sinh(ax)}{\sinh a}$ $z_4(x) = \frac{\sinh(a(x-1))}{a}$

$\Rightarrow G(x, t) = \begin{cases} \frac{\sinh ax \sinh(a(t-1))}{a \sinh a} & \text{si } x \leq t \\ \frac{\sinh at \sinh a(x-1)}{a \sinh a} & \text{si } x \geq t. \end{cases}$ ← ④

3°. Par la méthode indiquée et après des calculs pénibles, on trouve :

$\boxed{y = + \frac{x}{a^2} - \frac{\sinh ax}{a^2 \sinh a}}$ ← ⑤