

Mercredi 17/10/79

Problème I :

$K$  est un corps commutatif de caractéristique nulle. A toute substitution (i.e. permutation)  $s$  de  $S_n$ , on associe l'application  $f_s$  de  $K^n$  dans  $K^n$  définie par :  $f_s(x_1, \dots, x_n) = (x_{s1}, \dots, x_{sn})$ .

1 - 1. Montrer que  $f_s$  est un automorphisme de l'e.v.  $K^n$ .

2 - E étant un s.e.v. de  $K^n$ , on dit qu'il est invariant par  $S_n$  ssi :

$$\forall s \in S_n, \forall X \in E, f_s(X) \in E.$$

On définit les sous-ensembles suivants de  $K^n$  :

$$D_n = \{ X ; \forall i, x_i = x_1 \} \text{ et } P_n = \{ X ; \sum_{i=1}^n x_i = 0 \}.$$

Montrer que ce sont des s.e.v. invariants par  $S_n$ .

II - On veut montrer que  $D_n$  et  $P_n$  sont les seuls s.e.v. invariants propres.

Soit  $F_n$  un s.e.v. invariant par  $S_n$  dans  $K^n$ .

1 - a) Etudier les cas  $n = 2, n = 3$ .

b) Montrer que si  $(1, 0, \dots, 0) \in F_n$  alors  $F_n = K^n$ .

c) Montrer par récurrence sur  $k$  que si  $D_k \subset F_k$  et si  $D_k \neq F_k$  alors  $(1, 0, \dots, 0) \in F_k$  (dans  $K^k$ ).

d) En déduire que si  $D_n \subset F_n$  alors  $F_n = D_n$  ou  $F_n = K^n$ .

2 - a) Soit  $X_1$  défini par  $x_{ij} = 1$  si  $i \neq j$  et  $x_{11} = 1 - n$ . Chercher le rang de la famille :  $(X_i)$  pour  $i \in [1, n]$ .

b) Si  $F_n \subset P_n$ , soit  $X \in F_n$  avec  $x_1 \neq 0$ . En utilisant le cycle  $(2, 3, \dots, n)$  et ses puissances successives, montrer que  $(1-n, 1, \dots, 1) \in F_n$  ; en déduire  $F_n = P_n$ .

c) Déduire des résultats du II- 1&2 que si  $F_n \neq \{0\}$  et  $F_n \neq K^n$  alors :

$$F_n = D_n \text{ ou } F_n = P_n.$$

III  $X_0$  étant un vecteur de  $K^n$ , montrer que l'ensemble des  $s$  de  $S_n$  tels que  $f_s(X_0) = X_0$  est un sous-groupe de  $S_n$ . Préciser le cardinal de ce sous-groupe, pour  $n = 5$ , en discutant par rapport au choix de  $X_0$ .

H.B. : Ne pas oublier de cas !

Problème II :

Soit  $K$  le corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ( $p$  premier) et soit  $E$  l'espace vectoriel  $K^n$ .

1. Calculer  $\text{Card}(E)$ . Si  $(x_1, \dots, x_s)$  est une famille libre de  $E$ , déterminer le nombre de vecteurs  $x$  de  $E$ , tels que la famille  $(x_1, \dots, x_s, x)$  soit liée.

2. Montrer que le nombre  $a$  de familles linéairement indépendantes de  $s$  vecteurs extraits de  $E$  est :  $a = (p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{s-1})$ .

Exercice :

Etudier les suites définies par  $u_0$  et  $v_0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n); v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$  (utiliser des remarques simples).

Idee du barème: Problème I (15): I (2) 1:4 2:4 II (10) 1a:5 1b:5 1c:5 2:5 3:5 3a:5 3b:5 3c:2 III (2)

Problème II (2) 1:5 2:5 Exercice : 2.