

I- Dans tout le problème,  $i$  désignera le nombre complexe habituel.

1°) Déterminer les nombres complexes  $z$  tels que  $z^2 = 2i$ .

2°) Trouver les nombres complexes qui sont racines du polynôme :

$$f = X^2 - 4X + 5.$$

3°) Montrer que le polynôme  $g = X^3 - (1+2i)X^2 - 3X + 2i - 1$  a une racine commune  $\alpha$ , que l'on déterminera, avec le polynôme  $f$ .

4°) Quel est le quotient de la division de  $g$  par  $X - \alpha$  ?

5°) Décomposer le polynôme  $g(X)$  en un produit de facteurs du premier degré.

6°) Déterminer les polynômes  $h$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  de degré minimal qui sont multiples communs de  $f$  et du polynôme

$$k = X^3 - (1+2i)X^2 - 3X + a.$$

Discuter suivant les valeurs de  $a$ .

II- 1°) Soit le polynôme  $p$  de degré  $r$ , dont le terme constant n'est pas nul et dont les racines (distinctes ou non) sont  $x_1, x_2, \dots, x_r$ .

Montrer que  $p = p(0) \cdot \prod_{n=1}^r \left(1 - \frac{X}{x_n}\right)$ .

2°) On considère le polynôme  $q_m = \frac{1}{2i} \left[ (1+i\frac{X}{m})^m - (1-i\frac{X}{m})^m \right]$ .

Montrer que les racines de  $q_m$  sont données par :

$$\left(\frac{n+iX}{n-iX}\right)^m = 1 \text{ et sont } x_n = m \operatorname{tg} \frac{n\pi}{m} \quad (n \in [0, m-1]).$$

3°) Montrer que  $q_m = Xp$  où  $p$  vérifie  $p(0) = 1$ .

On prend  $m = 2p-1$ , montrer que les racines de  $p$  sont  $x_n = \frac{\pi}{2p-1} (2p-1) \operatorname{tg} \frac{n\pi}{2p-1}$

où  $n \in [1, p-1]$ .

En déduire :  $q_{2p-1} = X \cdot \prod_{n=1}^{p-1} \left(1 - \frac{X^2}{(2p-1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2p-1}}\right)$ .

III Décomposer sur  $\mathbb{R}$  la fraction rationnelle :

$$f = \frac{3X+8}{X(X^2+2X+2)^3}.$$