

Exercice 2

On a $\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0$ d'où l'idée de poser $x = \sqrt{2} \theta$; $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

On pose $u(x) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ donc : $x \leq 1 \Rightarrow \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow u(x) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$.

$x \geq 1 \Rightarrow \theta \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow u(x) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin \theta$.

ad. pour $x > 0$, on pose : $x = \cos \theta$ où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow u(x) = \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$.

donc : $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow u(x) = \cos \theta$.

$-1 \leq x < 0 \Rightarrow u(x) = \sin \theta$.

On pose $u(x) = \cos \theta$ où $\theta \in [0, \pi]$ et on trouve : $u(x) = \cos \theta$.

(à vérifier)

ad. Montrons par récurrence que : $u'_{n+1} = \pi u_n$.

Initialisation à l'ordre 0, supposons la vraie jusqu'à l'ordre n .

alors $u'_{n+1} = (2n+1)u_n - x^2 u'_{n-1} \Rightarrow u'_{n+1} = (2n+1)u_n - x^2 u'_{n-1} = \pi u_n$.
(en tenant compte de l'hypothèse.)

On a $u_{n+1} = (2n+1)u_n - x^2 u'_{n-1}$ et en dérivant, on obtient : $\pi u_n - 2x u'_{n-1} + x^2 u''_{n-1} = 0$.

Montrons cette propriété par récurrence : vérifiée pour $n=0$ (!), $n=1$ et on suppose la à l'ordre n .

à l'ordre $n+1$: $u_{n+1}(0) = 0$ (on utilise la rel. de récurrence).

ad. grâce à la formule de Leibniz : $u'_{n+1} = \pi u_n \Rightarrow u'_{n+1} = \pi u_n + 2x u'_n$.

alors $u'_{n+1}(0) = 0$ si $2n-1 \leq 2n$ (récurrence), i.e. $u'_{n+1}(0) = 0$ pour $0 \leq p \leq n$.

On a $\sigma_n = u_n(0)$ et on a : $\sigma_0 = 1$ et, comme $u'_{n+1} = \pi u_n + 2x u'_n$ on a :

grâce à la rel. de réc. : $\sigma_{n+1} = 2(n+1)\sigma_n$.

où : $\sigma_n = u_n(0) = 2n \cdot 2(n-1) \dots 2 = 2^n n!$.

On a immédiatement : $P_{n+1} = (2n+1)P_n - x^2 P_{n-1}$ avec : $P_0 = P_1 = 1$.

et $Q_{n+1} = (2n+1)Q_n - x^2 Q_{n-1}$ avec : $Q_0 = 0, Q_1 = x$.

La récurrence immédiate, a conduit : P_n pair, Q_n impair.

Montrons maintenant que : $\deg P_{2n} = 2n$ et $\deg P_{2n+1} = 2n$ avec :

signe du terme de + haut $\deg$ de P_{2n} et de $P_{2n+1} = (-1)^n$.

ad. à l'ordre 0, on la suppose vraie à l'ordre n :

alors : $P_{2n+2} = (4n+5)P_{2n+1} - x^2 P_{2n}$ $\Rightarrow \deg P_{2n+2} = 2n+2$ et signe du terme

de + haut de $P_{2n+2} = (-1)^n (-1) = (-1)^{n+1}$.

et $P_{2n+3} = (4n+7)P_{2n+2} - x^2 P_{2n+1}$: dans les 2 polynômes qui interviennent, les

termes de $\deg$ $2n$ ont le même signe, donc, leur somme ne peut être nulle.

et par conséquent, la récurrence est démontrée.

Les polynômes Q_n , on procède de même et on trouverait :

$\deg Q_{2n} = 2n-1$ et $\deg Q_{2n+1} = 2n+1$

et Q_n est réel car P_n est pair (donc, $P_n(x)$ est réel) et Q_n est impair (donc, $Q_n(x)$ est réel).

On démontre la relation :

$u'_{n+1}(x) = 2(n+1)u'_n(x) + 2x u_n(x) = 0$