

Calculer les coef. de P_n :

$$\begin{aligned} P_n' &= 2\alpha_1 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2} \\ P_n'' &= 2\alpha_2 + \dots + (n-2)\alpha_{n-2}x^{n-4} \\ \vdots \\ P_n^{(k)} &= 2\alpha_k + \dots + (n-k)\alpha_{n-k}x^{n-2k} \\ \vdots \\ P_n^{(n)} &= 2\alpha_n \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -10 \text{ et } \alpha_{10} = -\frac{1(1-10)}{(1-1)(1-1)} \\ \alpha_2 = \frac{(-1)^2 2^2}{2!} \frac{C_n^2}{C_n^0} \end{cases}$$

Il faut calculer α_0 et α_1 . $\alpha_0 = a_0 = P_n(0)$ et pour calculer $P_n(0)$ on utilise l'eq. de réc. $\Rightarrow a_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$

III. 1°). $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x^2} \geq x$, donc, $g(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

$g(x) = -\frac{1}{2} \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ et comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$, g' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°). $2\sqrt{1+x^2} \cdot g'(x) = -g(x)$ d'où en dérivant:

$$2\sqrt{1+x^2} \cdot g''(x) + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} g'(x) = -g'(x) \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{g'(x)}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et on multiplie par } 2\sqrt{1+x^2}$$

$$g''(x) = \frac{g(x) - 4xg'(x)}{4(1+x^2)} : g'' \text{ est le quotient de fonctions dérivables sur } \mathbb{R},$$

donc, g'' est dérivable, i.e. g est 3 fois dérivable.

Par récurrence: g dérivable à l'ordre $n \Rightarrow g'$ dérivable à l'ordre n et par le même raisonnement, or on a g'' dérivable à l'ordre n $\Rightarrow g$ dérivable à l'ordre $n+1$.

3°). On trouve: $A_n = 4(1+x^2)$; $B_{n+1} = B_n + 8x$ et $C_{n+1} = C_n + B'_n$.

d'où: $B_n = 4x(2n+1)$ et $C_n = 4n^2(4x^2-1)$.

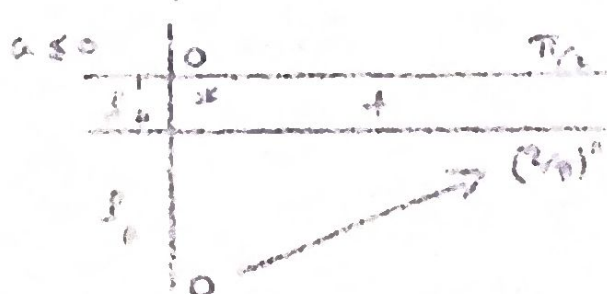
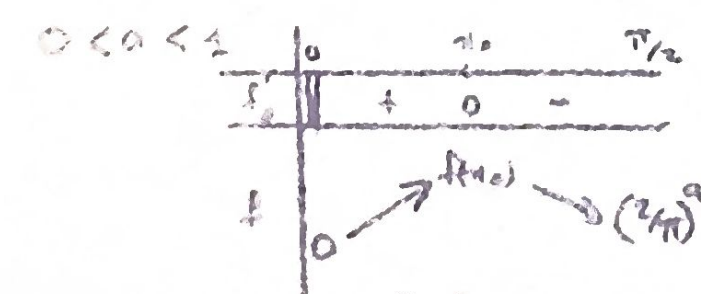
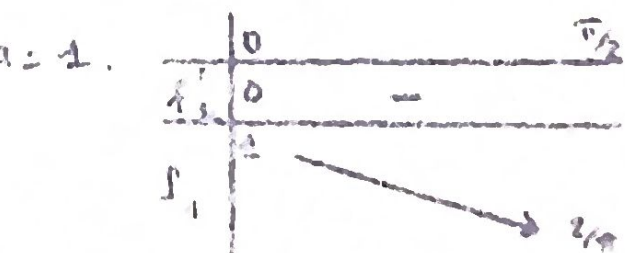
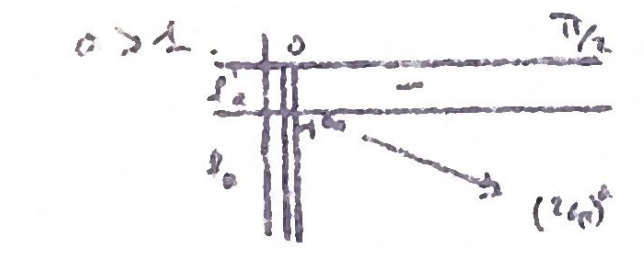
IV. 1°). pour $x \geq a$ on peut prolonger f en 0.

2°). $a < 1$: f n'est dérivable en 0 que si $a \leq 0$.

si $a = 1$: f est dérivable en 0.

3°). $a \leq 0$ pas de solution. si $a > 0$: $g_0(x) = 1-a-a\sqrt{1+x^2}$. si $a \geq 1$ $g_0(x) \leq 0$ et si $a < 1$: 1 seule solution.

4°). Différents tableaux de variation: $f_a'(x) = \frac{\cos x}{x^{a+1}} \cdot g_0(x)$: du signe de g_0 .



$$\begin{aligned} f_0'(0) &= 0 \text{ si } a = 0 \\ f_0'(0) &= 1 \end{aligned}$$

si a_0 est tel que $x_0 \text{ et } x_1 \text{ de } x_0 \text{ et } x_1 \text{ de } x_0 \text{ et } x_1 \text{ de } x_0$