

Problème 1.

I. 1.  $f_j$  a.l. : évident. et  $(f_n)^{-1} = f_{j-1}$ .

2.  $D_n$  et  $P_n$  sont bien des s.e.v.

Si  $X \in D_n$ , alors:  $X = \lambda(1, \dots, 1)$  or:  $f_0(1, 1, \dots, 1) = (1, \dots, 1) \Rightarrow f_0(D_n) = D_1$ .

Si  $X \in P_n$ , alors:  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i = 0$  donc:  $P(P_n) = P_n$ .

II. 1.

a).  $n=2$ :  $F_2$ : s.e.v. invariant par  $S_2$ ; donc, si  $(x_1, x_2) \in F_2$ ,  $(x_2, x_1) \in F_2$ ; d'où:  $(x_1+x_2, x_1+x_2) \in F_2$ ; d'où 2 cas:

i).  $x_1+x_2 = 0 \Rightarrow F_2 \subset P_2$  or:  $\dim P_2 = 1 \Rightarrow F_2 = \{0\}$  ou  $F_2 = P_2$ .

ii).  $x_1+x_2 \neq 0 \Rightarrow (1, 1) \in F_2 \Rightarrow D_2 \subset F_2$ ; or:  $\dim D_2 = 1 \Rightarrow F_2 = K^2$  ou  $F_2 = D_2$ .

$n=3$ : si  $(x_1, x_2, x_3) \in F_3$  alors:  $(x_1+x_2+x_3)(1, 1, 1) \in F_3$ : 2 cas:

i).  $x_1+x_2+x_3 = 0 \Rightarrow F_3 \subset P_3$  (et  $\dim P_3 = 2$ ); on suppose  $F_3 \neq \{0\}$ .

On se ramène au cas où  $x_1 \neq 0 \Rightarrow x_2+x_3 = -x_1$ .  $(x_1, x_2, x_3) \in F_3 \Rightarrow (2x_1, x_2-x_3, x_2-x_3) \in F_3$

donc:  $(2, -1, -1) \in F_3$  et aussi:  $(-1, 2, -1) \in F_3$ , les 2 vecteurs sont linéairement indépendants, donc:  $\dim F_3 \geq 2$ ; or:  $F_3 \subset P_3 \Rightarrow \dim F_3 \leq 2$ ; par conséquent:  $\dim F_3 = 2$  et  $F_3 \subset P_3 \Rightarrow F_3 = P_3$ .

ii).  $x_1+x_2+x_3 \neq 0 \Rightarrow (1, 1, 1) \in F_3$  donc:  $D_3 \subset F_3$ . si  $F_3 \neq D_3$ :

Soit  $p$ , la proj. de  $K^3$  sur  $K^2$ : alors:  $p(F_3)$  contient  $(1, 1)$

montrons que  $p(F_3) \neq D_2$ . En effet: si  $p(F_3) = D_2 \Rightarrow x_1 = x_2$  (donc, on peut projeter  $F_3$  sur  $K^2$  de la façon suivante:  $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$  ou  $(x_2, x_3)$ ).

Comme  $F_3 \neq D_3$ ,  $\exists X \in F_3$ ,  $X \notin D_3$  donc,  $\exists(x_1, x_2, x_3)$ :  $x_1 \neq x_2$  ou  $x_1 \neq x_3$  ou  $x_2 \neq x_3$

Conclusion:  $p(F_3) = K^2$  (cas  $n=2$ )  $\Rightarrow (1, 0) \in p(F_3)$ .

D'où:  $\exists (1, 0, a) \in F_3$  si  $a \neq 1$ .  $\begin{pmatrix} 0, 1, a \\ 0, a, 1 \end{pmatrix}$  sont libres,  $\Rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 1, 0, a \\ 0, 1, a \\ 0, a, 1 \end{pmatrix} = 3$ .

Si  $a=1$ :  $(1, 0, 1) + (0, 1, 1) = (1, 1, 1) \in F_3$ ;  $\Rightarrow F_3 = K^3$ .  
 $(1, 0, 1) + (0, 0, -1) \Rightarrow \dim F_3 = 3 \Rightarrow F_3 = K^3$ .

Donc, pour  $n=2$  ou  $n=3$ , les seuls s.e.v. propres (i.e. distincts de  $\{0\}$  et  $K^n$ ) sont:  $D_n$  et  $P_n$ .

b). Si  $(1, 0, \dots, 0) \in F_n$ , alors,  $(0, 1, \dots, 0) \in F_n, \dots, (0, 0, \dots, 1) \in F_n \Rightarrow \dim F_n = n \Rightarrow F_n = K^n$ .

c). Récurrence: vrai pour  $n=2$ ,  $n=3$  (en effet, si  $F_3 = K^3$ ,  $(1, 0, 0) \in F_3$ ).  
Vrai à l'ordre  $k$ .

A l'ordre  $k+1$ : Si  $D_{k+1} \in F_{k+1}$  et si  $D_{k+1} \neq F_{k+1}$ ,  $\exists X = (x_1, \dots, x_{k+1}) \in F_{k+1}$ ,  $x_1 \neq 0$ .

Soit  $p$  la proj. de  $K^{k+1}$  sur  $K^k$ :

$(1, 1, \dots, 1) \in F_{k+1} \Rightarrow (1, \dots, 1) \in p(F_{k+1}) \Rightarrow D_k \subset p(F_{k+1})$  et  $p(X) \notin D_k \Rightarrow D_k \neq p(F_{k+1})$ .

donc:  $p(F_{k+1})$  contient  $(1, 0, \dots, 0)$  et par conséquent:  $\exists (1, a, 0, \dots, 0, a) \in F_{k+1}$ .