

Les 2 vecteurs $(0, \dots, 0, 1, 0)$ et $(0, \dots, 0, 0, 1)$ ($a=1$) appartiennent à l'esp. supp. $\mathcal{L}$ de l'ov. engendré par $(1, 0, \dots, 0, 0), \dots, (0, \dots, 1, 0, 0)$ (ce dernier a pour dim. $n-1$).
 Il suffit, si $a \neq 1$, de montrer que les 2 vecteurs ci-dessus sont libres (ce qui est immédiat) pour conclure : $K^{n-1} = F_n$, d'où : $(1, 0, \dots, 0) \in F_n$.

Si $a = 1$, alors $(1, 0, \dots, 1) + \dots + (0, \dots, 1, 1) = (1, \dots, 1) = (n-1)(0, \dots, 0, 1)$

donc, $(1, 0, \dots, 0) \in F_n$: récurrence terminée.

d). Soit $D_n \subset F_n$: 2 cas : $D_n = F_n$ (terminé) ou $D_n \neq F_n \Rightarrow F_n = K^n$.

2°. a). $X_1 = (1, n, 1, \dots, 1)$
 $X_2 = (1, 1, n, \dots, 1)$: $\text{rg}(X_i) \leq n-1$ car $\sum X_i = 0$.
 $X_n = (1, 1, \dots, 1, n)$.

Posez : $X'_1 = X_1 - X_2 = (n, n, 0, \dots, 0)$ on obtient 1 système triangulaire, donc,
 $X'_2 = X_2 - X_1 = (n, 0, \dots, n, 0)$ $\text{rg}(X'_i) = n-1$.
 $X'_n = X_n - X_1 = (n, 0, \dots, 0, n)$

b). $X \in F_n : \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow x_1 = -\sum_{i=2}^n x_i : x_1 \neq 0$. $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_n$.
 $(x_1, x_3, \dots, x_n) \in F_n \Rightarrow (x_1, \sum_{i=2}^n x_i, \dots, \sum_{i=2}^n x_i) \in F_n$
 $(x_1, x_n, \dots, x_2) \in F_n$. et en simplifiant par :

on trouve : $(1, n, 1, \dots, 1) \in F_n$; donc, les X_i sont des vecteurs de $F_n \Rightarrow \dim F_n \geq n-1$.

or : $F_n \subset P_n$ et $\dim P_n = n-1 \Rightarrow F_n = P_n$.

c). F_n s.o.v. invariant par $\mathcal{S}_n$: $F \neq \{0\}$: $\exists K \neq 0 : x \in F_n$. 2 cas à distinguer.

i). $\forall x \in F_n : \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow F_n \subset P_n$ donc, 2° b). $F_n = P_n$.

ii). $\exists K \in F_n : \sum_{i=1}^n x_i \neq 0 \Rightarrow (1, \dots, 1) \in D_n$ d'où : $F_n = D_n$ (terminé)

ou : $F_n \neq D_n$ et 2° d) : $F_n = K^n$. On obtient bien le résultat demandé.

III. Soit $G = \{s, f_s(x_0) = x_0\}$. id $\in G$; si $f_s(x_0) = x_0 \Rightarrow f_{f_s}(x_0) = x_0$.

et si $f_{f_s}(x_0) = x_0 \Rightarrow f_s \circ f_s(x_0) = f_{f_s}(x_0) = x_0$. donc, G est 1 groupe.

$n=5$: $X_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$: on obtient les cas suivants :

①. $\forall i, j : x_i \neq x_j \Rightarrow f_0(X_0) = X_0 \Rightarrow s = \text{id}$: $\text{card } G = 1$; ②. $x_1 = x_2$ et les autres sont distincts : $G = \{\text{id}, f_{1,2}\}$: $\text{card } G = 2$.

③. $x_1 = x_2, x_3 = x_4, x_5 \neq$: $G = \{\text{id}, f_{1,2}, f_{3,4}, f_{1,2} \circ f_{3,4}\}$: $\text{card } G = 4$; ④. $x_1 = x_2 = x_3, x_4, x_5 \neq$: $G = S_3$: $\text{card } G = 6$.

⑤. $x_1 = x_2 = x_3, x_4 = x_5$: $G = S_3 \times \{f_{4,5}, \text{id}\}$: $\text{card } G = 12$. ⑥. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4, x_5 \neq$: $G = S_4$: $\text{card } G = 24$.

⑦. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$: $G = S_5$. $\text{card } G = 120$.

Problème II :

1). $\text{card } E = p^n$; $x \in \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_p) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i : p^p$ choix.

2). $p=1$: (x_1) famille libre si : $x_1 \neq 0$: $p^1 - 1$ famille.

$p=2$: (x_1, x_2) libre : $x_i \neq 0$: $p^2 - 1$ choix et x_1 est choisi pour que (x_1, x_2) ne soit pas lib. $p^2 - p$ choix (cf 1). $\Rightarrow (p^2 - 1)(p^2 - p)$ famille libre à 2 elts.

Par récurrence, $(x_1, \dots, x_p)$ libre : $(p^p - 1)(\dots)(p^p - p^{p-1})$ choix.

et pour $p=1$ par ex. on a : $p^1 - p^0$ choix : propriété vérifiée.

Exercice : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - v_n) = \frac{1}{3^n}(u_0 - v_0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1}) = 0$

$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = u_0 + v_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + v_{n+1}) = u_0 + v_0$

or : $u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) + \frac{1}{2}(u_n - v_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}(u_0 + v_0)$

et de même : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}(u_0 + v_0)$.