

Mercrèdi 12/12/79

I- Simplifier les expressions suivantes :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2} \sqrt{x^2+1}}, \quad g(x) = \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad h(x) = \operatorname{Arccos} \sqrt{\frac{1+x}{2}}.$$

On pourra calculer les dérivées, puis à l'aide d'un raisonnement rigoureux montrer que f, g, h ont une forme plus simple.

II- On considère la suite (u_n) de fonctions définies par : $u_0(x) = \sin x$ et $u_1(x) = \sin x - x \cos x$ et la récurrence : $u_{n+1}(x) = (2n+1)u_n(x) - x^2 u_{n-1}(x)$.
Montrer que :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u'_{n+1} = x u_n$ et $x u_n'' - 2x u_n' + x u_n = 0$.
- u_n et ses $2n$ premières dérivées s'annulent en 0; calculer $u_n^{(2n+1)}(0)$.
- $u_n(x) = P_n(x) \sin x + Q_n(x) \cos x$; P_n et Q_n sont des polynômes pour lesquels on précisera relation de récurrence, degré, parité;
- le polynôme R_n défini par $R_n(x) = P_n(ix) + i Q_n(ix)$ est réel et vérifie $x R_n''(x) + 2(x-n) R_n'(x) - 2n R_n(x) = 0$, en déduire une expression explicite des coefficients de R_n (comme R_n est de degré n , on posera $R_n(x) = \sum_{p=0}^n r_p x^p$, puis on cherchera une relation de récurrence sur les r_p), puis de P_n et de Q_n .

III- Soit $g(x) = \sqrt{-x + \sqrt{1+x^2}}$.

- Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que l'on a l'égalité : $4(1+x^2)g''(x) + 4xg'(x) - g(x) = 0$; en déduire que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Montrer qu'il existe des ~~max~~ polynômes simples A_n, B_n, C_n tels que l'on ait la relation : $A_n(x)g^{(n+2)}(x) + B_n(x)g^{(n+1)}(x) + C_n(x)g^{(n)}(x) = 0$.

IV- On considère la fonction f_a , où $a \in \mathbb{Q}$, définie sur $]0, \pi/2[$ par :

$$f_a(x) = (\sin x)/x^a.$$

- Pour quelles valeurs de a peut-on prolonger f en 0 ?
- Etudier la dérivabilité de f en 0.
- Discuter suivant les valeurs de a le nombre de solutions de l'équation $g_a(x) = 0$, où $g_a(x) = x - a \operatorname{tg} x$ pour $x \in]0, \pi/2[$.
- En déduire, selon les cas, les différents tableaux de variations de f_a .

Idée du barème : I 4

II 6,5a) 1 b) 1 c) 1,5d) 3

III 4,5 1°) 1 2°) 1,5 3°) 2 IV 5 1) 0,5 2°) 1 4°) 2