

III 5

Mercredi 15/1/80

DEVOIR SURVEILLÉ

I Soit $D =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $D_1 =]-1, 1[$.

1°) Montrer qu'il existe une fonction f , définie dans D , à valeurs dans $]0, 1[$ telle que pour tout x de D , $f(x)$ est égal à l'unique θ défini par la relation : $\cos x = 1 - x^2/2 + (x^3/6)\sin(\theta x)$.

b) Expliciter cette relation.

c) Chercher le D.L. de f au voisinage de 0 à l'ordre 5.

2°) Montrer qu'il existe une fonction g , définie dans D_1 , à valeurs dans $]0, 1[$ telle que pour tout x de D_1 , $g(x)$ est égal à l'unique φ défini par la relation : $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^2/[3(1+\varphi x)^3]$.

b) Expliciter cette relation.

c) Chercher le D.L. de g au voisinage de 0 à l'ordre 2.R.B. : On montrera bien que les θ, φ ainsi définis sont bien uniques.II Soit $f(x) = \operatorname{Arctg} \sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}}$.1°) Chercher le domaine de définition de f .

2°) Donner le D.L. de f à l'ordre 5 au voisinage de 0. f étant paire, que remarque-t-on?

III On désigne par C_a l'ensemble des couples (x, y) de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient la relation : $y^2 = 2(x^3 - a)/(x+1)$.

1°) Etudier la fonction positive qui permet de représenter C_a : on distinguera les cas $a < -1$, $a = -1$, $-1 < a < 0$, $a \geq 0$.

2°) Question à traiter soigneusement : domaine de définition, tableau de variation, asymptotes, points particuliers.)

3°) Tracer avec soin les courbes C_a pour : $a = -2$, $a = -1$, $a = -1/2$, $a = 1$ sur une même représentation graphique.

4°) On cherche l'intersection de C_a avec la droite d'équation : $y = x$.

a) Etudier en fonction de a le nombre de points d'intersection.

b) Pour $a = 0$, $x = 1$ est solution, et au voisinage de $a = 0$, on peut définir x en fonction de a (x restant voisin de 1); cette fonction est indéfiniment dérivable et dans cette question on demande de trouver son D.L. à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Idée du barème :

I (51°) 4 2°) 3,5 II (3,51°) 4 2°) 2,5 III 9 1°) 3,5 2°) 2 3°) 3,5.