

Convergence du cosinus

1°. a). On écrit la formule de Taylor. Logrange à l'ordre 3.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sin(\theta x); \quad \text{montrons l'unicité de } \theta \text{ pour } x \in \mathbb{D}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sin(\theta' x) \Rightarrow \sin \theta x = \sin \theta' x \text{ et comme } \theta x \in \mathbb{D} \text{ et } \theta' x \in \mathbb{D}$$

on en déduit que $\theta x = \theta' x \Leftrightarrow \theta = \theta'$ c.q.f.d.

b). On trouve : $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{Arcsin} \left[\frac{x}{x^2} \left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \right) \right]$.

c). On écrit le D.L. de $\cos x$ à l'ordre 3 et on trouve :

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{11x^2}{1920} - \frac{237}{860160} x^4 + o(x^5)$$

2°. a). A nouveau, on écrit la formule de Taylor. Logrange à l'ordre 3.

Pour montrer l'unicité de φ , on procède comme au 1°).

b). On trouve : $g(x) = \frac{1}{x} \left[\left(\frac{x^3}{3(\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2})} \right)^{1/3} - 1 \right]$.

c). On écrit le D.L. de $\log(1+x)$ à l'ordre 6, et on trouve :

$$g(x) = \frac{1}{4} + \frac{3x}{40} + \frac{19x^2}{480} + o(x^3)$$

II - 1°. Comme f est paire on se limite à $x > 0$; or $\sin x \leq x$ donc,

$$1 - \frac{\sin x}{x} \geq 0 \text{ et on conclut : } D_f = \mathbb{R}.$$

2°. $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^7)$.

$$\sqrt{1 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{6}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{20} + \frac{x^4}{840} + o(x^5)} = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{6}} \left(1 - \frac{x^2}{40} + \frac{15x^4}{67200} + o(x^5) \right)$$

d'où, en écrivant le D.L. de $\operatorname{Arcsin} u$ à l'ordre 5 :

$$f(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}} \left[x - \frac{29x^3}{360} + \frac{2017}{201600} x^5 + o(x^5) \right]$$

Comme f est paire, la partie régulière du D.L. de f doit être paire, ce qui est le cas car ε est du signe de x .

III - 1°. Il faut étudier : $f_a(x) = \sqrt{\frac{2(x^3-a)}{x+1}}$;

domaine de définition : $a > -1 : D_f =]-\infty, -1[\cup [a^{1/3}, +\infty[$.

$a < -1 : D_f =]-\infty, a^{1/3}] \cup]-1, +\infty[$.

$a = -1 : D_f = \mathbb{R}$ car : $f_1(x) = \sqrt{2(x^3-x+1)}$.

Dérivée : $f'(x) = \frac{2x^3+3x^2+a}{(x+1)^2 \sqrt{2(x^3-a)}}$ du signe de $g(x) = 2x^3+3x^2+a$.

Tableau de variation de g :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$2x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$

d'où : 3 cas : i). $a \leq -1$: deux racines $x_1 > 0$ et $x_2 \in D_f$

ii). $a \geq 0$: ... $x_2 < -1$ $x_3 \in D_f$

iii). $-1 < a < 0$: 3 racines : $x_1 > 0$, $x_2 \in D_f$ et $x_3 \in]-1, 0[$

On voit très facilement que :

$x_1 \in D_f$, $x_2 \in D_f$, montrons que $x_3 \in D_f$:

$$2x_3^3 + 3x_3^2 + a = 0 \Leftrightarrow x_3^3 + a = -2x_3^3 - 3x_3^2 = -3x_3^2(x_3 + 1) \Rightarrow \frac{x_3^3}{x_3+1} = -\frac{3x_3^2}{2} > 0$$