

I - Problème :

Dans tout le problème, $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels, de dimension quelconque. On désigne par $\mathcal{E}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé par les matrices d'ordre n . Pour $M \in \mathcal{E}$, on associe le nombre $d(M)$ égal à l'ordre de la matrice M . On note $f_M \in \mathcal{L}(R^{d(M)}, R^{d(M)})$ l'application linéaire dont la matrice est M dans la base canonique de $R^{d(M)}$.

PARTIE I

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de R^n . Montrer que la famille $B^2 = \{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e_1), \dots, (0, e_n)\}$ forme une base de $R^n \times R^n$.

2°) Soit $M \in \mathcal{E}_n$ et f_M l'application associée dans $\mathcal{L}(R^n, R^n)$.

A l'application f_M on associe f_M^2 endomorphisme de $R^n \times R^n$ défini par :

$$f_M^2(x, y) = (f_M(x), f_M(y)).$$

Ecrire la matrice de f_M^2 dans la base B^2 à l'aide des coefficients m_{ij} de la matrice M .

3°) La matrice de f_M^2 dans la base B^2 ne dépend que de M et sera notée $\varphi(M)$ dans toute la suite. Décrire cette application en utilisant la matrice nulle O d'ordre n . En particulier, que vaut $d(\varphi(M))$?

4°) Montrer que si $d(M) = d(N)$, on a : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$.

$$f_{\lambda M + \mu N}^2 = \lambda f_M^2 + \mu f_N^2 \quad \text{et} \quad f_{M \cdot N}^2 = f_M^2 \circ f_N^2.$$

En déduire :

$$\varphi(\lambda M + \mu N) = \lambda \varphi(M) + \mu \varphi(N) \quad \text{et} \quad \varphi(M \cdot N) = \varphi(M) \cdot \varphi(N).$$

5°) Que peut-on dire de $\varphi(M)$ si M est symétrique ?

6°) Soit $x = e_1 + e_2 + \dots + e_n$; donner une C.N.S. simple portant sur M pour qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_M^2(x) = \lambda x$; on note $S(M)$ ce réel.

L'ensemble des matrices vérifiant la condition précédente sera notée $\tilde{\mathcal{E}}$. Montrer que si $M \in \tilde{\mathcal{E}}$, alors $\varphi(M) \in \tilde{\mathcal{E}}$. Comparer $S(M)$ et $S(\varphi(M))$.

7°) Soit $J \in \mathcal{E}$ une matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.

Soit $M \in \tilde{\mathcal{E}}$ telle que $d(M) = d(J)$. Calculer $M \cdot J$.

Si M est en outre symétrique, calculer $J \cdot M$.

PARTIE II

On note J_n la matrice d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1.

Pour $q \in \mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq q$, on définit la matrice

$$A_{q,k} = (\varphi^{q-k} \circ J_{2k})$$

où φ^0 désigne l'application identique de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

1°) Ecrire explicitement les matrices $A_{q,k}$ pour $q = 0, 1, 2$.

2°) Calculer $d(A_{q,k})$, écrire $A_{q,0}$ et $A_{q,q}$.

3°) Montrer que $\forall q, \forall k, A_{q,k} \in \tilde{\mathcal{E}}$ (on utilisera 16°) et donner la valeur de $S(A_{q,k})$. Montrer que $A_{q,k}$ est symétrique.