

4°) Montrer que si $k \geq k'$ $A_{q,k} \cdot A_{q,k'} = A_{q,k} \cdot A_{q,k'} = 2^{k'} \cdot A_{q,k}$.

(On utilisera les résultats obtenus à partir du I 4°).

5°) R. décrire que le sous-espace vectoriel $\mathcal{M}_q$ engendré dans $\mathcal{E}_{2,q}$ par la famille $(A_{q,0} ; A_{q,1} ; \dots ; A_{q,q})$ est une algèbre incluse dans $\mathcal{E}_{2,q}$.

PARTIE III

Dans cette partie, on pose $q = 3$ et on notera :

$$H_0 = A_{3,0} ; H_1 = A_{3,1} ; H_2 = A_{3,2} ; H_3 = A_{3,3}.$$

1°) Montrer que les ~~matrices~~ matrices H_i sont linéairement indépendantes, et donner leur table de multiplication.

2°) Soient M, X deux éléments de $\mathcal{M}_3$. On notera :

$$M = \sum_{i=0}^3 \lambda_i H_i \quad X = \sum_{i=0}^3 x_i H_i.$$

Calculer les coordonnées de $M \cdot X$ sur la base (H_0, H_1, H_2, H_3) .

3°) On désigne par I la matrice unité de $\mathcal{E}_8$, montrer que l'équation $M \cdot X = I$ où X est inconnue, admet une solution dans $\mathcal{M}_3$ si le produit :

$$\lambda_0(\lambda_0 + 2\lambda_1)(\lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2)(\lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3)$$

n'est pas nul.

4°) Montrer que si l'un des facteurs du produit précédent est nul, l'équation $M \cdot X = 0$ admet des solutions dans $\mathcal{M}_3$.

5°) Calculer l'inverse de :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

INA. 78.

II - Exercice :

Soit D_{2n} le déterminant de la matrice (a_{ij}) où $a_{ij} = 0$ si $i+j$ est impair $i \in [1, 2n]$ $j \in [1, 2n]$.

1°) Ecrire D_4 , montrer que D_4 peut se mettre sous la forme d'un produit de deux déterminants d'ordre 2.

2°) Soient les matrices $A = (a_{2i-1, 2j-1})$ et $B = (a_{2i, 2j})$ où i désigne la ligne et j la colonne. Quelle relation existe-t-il entre D_{2n} , $\det A$ et $\det B$. (On précisera clairement les propriétés utilisées.)

Idée du barème :

Problème : partie I 15 1° 5 2° 4 3° 5 4° 1 5° 6 6° 1 7° 1 partie II 15 1° 1 2° 1 3° 1 4° 1 5° 1 partie III 15 1° 5 2° 1 3° 1 4° 1 5° 1.

Exercice 15 1° 1 2° 2,5.