

Consignes du devoir :

Pb. I. 1°. 2° 1 & 3°. matrice de $f'_M = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ et $d(\varphi(M)) = 2.d(M)$.

2°. On écrit : $f'_{M,N}(x,y) = (f'_{M,N}(x), f'_{M,N}(y))$ et on utilise la propriété :

$f'_{M,N} = \lambda.f'_M + \mu.f'_N$; de même pour $f'_{N,N}$, on utilise la propriété : $f'_{N,N} = f'_M \circ f'_N$ d'où les relations avec φ .

5°. $\varphi(M) = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix} = \varphi(M)$, donc $\varphi(M)$ est symétrique.

6°. $\exists \lambda : f'_M(x) = \lambda.x \Leftrightarrow \forall i \in [1,n], \sum_{j=1}^n m_{ji} = \lambda = S(M)$.

si $M \in \bar{\mathbb{E}}$, la somme des termes d'une ligne de $\varphi(M)$ est égal à la somme des termes de la même ligne de M ou de la $i^{\text{ème}}$ colonne de M d'où $d(M)$ ligne, donc, $\varphi(M) \in \bar{\mathbb{E}}$.

et $S(M) = S(\varphi(M))$.

7°. On a : $MJ = S(M).J$ et nId est symétrique : $J.M = S(M).J$.

II. 1°. $q=0 : A_{0,0} = J_1 = (1)$; $q=1 : A_{1,1} = J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

$q=2 : A_{2,2} = J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{2,1} = \varphi(J_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A_{2,0} = I_4$.

2°. Comme $d(\varphi(M)) = 2.d(M)$, $d(A_{q,q}) = 2^{q-1} \times 2^q = 2^q$; $A_{q,0} = I_{2^q}$ et $A_{q,q} = J_{2^q}$.

3°. $J_{2^q} \in \bar{\mathbb{E}}$, donc, par récurrence sur n , $\varphi^n(J_{2^q}) \in \bar{\mathbb{E}} \Rightarrow A_{q,q} \in \bar{\mathbb{E}}$.

et $S(\varphi^n(J_{2^q})) = S(J_{2^q}) = 2^q \Rightarrow S(A_{q,q}) = 2^q$.

Donc même, $A_{q,q}$ est symétrique : par récurrence.

4°. Par récurrence sur n , on a : $\varphi^n(M.N) = \varphi^n(M). \varphi^n(N)$.

donc, $A_{q,q'} . A_{q,q} = \varphi^{q-q'} [\varphi^{q-q'}(J_{2^q}). J_{2^q}] = \varphi^{q-q'}(2^{q'} J_{2^q}) = 2^{q'} . A_{q,q}$.

Même démonstration dans l'autre sens (ou, on peut se servir de la symétrie des matrices $A_{q,q}$).

5°. Si $M \in \mathcal{H}_q$, alors, $M = \sum_{k=0}^q \lambda_k A_{q,k}$, de même, $N = \sum_{k=0}^q \mu_k A_{q,k}$.

Pour que $\mathcal{H}_q$ soit une sous-algèbre de $\mathbb{E}_{2^q}$, il suffit de montrer que $M.N \in \mathcal{H}_q$.

Or : $M.N = \sum_{k,k'} \lambda_k \mu_{k'} A_{q,k} . A_{q,k'}$ et $A_{q,k} . A_{q,k'} \in \mathcal{H}_q$, c.q.f.d.

III. 1°. $A_{3,0} = I_8$; $A_{3,2} = \begin{pmatrix} J_4 & 0 \\ 0 & J_4 \end{pmatrix}$; $A_{3,1} = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$; $A_{3,3} = J_8$.

Soit une combinaison linéaire des H_i :

$$\lambda_0 H_0 + \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \lambda_3 H_3 = 0$$

1^{ère} ligne, dernier colonne : $\Rightarrow \lambda_3 = 0$.

" , 4^{ème} " $\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

" , 2^{ème} " $\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

" , 1^{ère} " $\Rightarrow \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$.

c.q.f.d.

Table de multiplication :

$\cdot$	H_0	H_1	H_2	H_3
H_0	H_0	H_1	H_2	H_3
H_1	H_1	$2H_1$	$2H_2$	$2H_3$
H_2	H_2	$2H_2$	$4H_2$	$4H_3$
H_3	H_3	$2H_3$	$4H_3$	$8H_3$

(en utilisant la propriété de II 4°.)