

2° On trouve: $MX = \lambda_0 x_0 H_0 + (\lambda_1 x_0 + \lambda_0 x_1) 2\lambda_1 H_1 + (\lambda_1 x_0 + \lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_1 + 4\lambda_2 x_0) H_2 + (\lambda_1 x_0 + \lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_1 + 4\lambda_2 x_0 + 4\lambda_3 x_2 + 4\lambda_2 x_1 + 8\lambda_3 x_3) H_3$.

3° Répondre $MX = I$ est équivalent au système:

$$\lambda_0 x_0 = 1$$

$$\lambda_1 x_0 + (\lambda_0 + 2\lambda_1) x_1 = 0$$

$$\lambda_1 x_0 + 2\lambda_1 x_1 + (\lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2) x_2 = 0$$

$$\lambda_1 x_0 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_2 x_2 + (\lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3) x_3 = 0$$

Le déterminant du système est égal à: $\Delta = \lambda_0 (\lambda_0 + 2\lambda_1) (\lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2) (\lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3)$.

D'autre part, si l'inverse de M existe, il est unique, d'où $\Delta \neq 0$.

M inversible $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$.

4° Si le produit est nul, alors, M n'est pas inversible, donc, M est un diviseur de 0, par conséquent, $\exists X \neq 0$ tel que $MX = 0$.

5° On a: $M_0 = H_0 + 2H_1 - 3H_2 + H_3$ et en résolvant le système ci-dessus, on trouve:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = -\frac{2}{5}$$

$$x_2 = -\frac{3}{35}$$

$$x_3 = \frac{1}{35}$$

d'où: $M_0^{-1} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 23 & -12 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ -12 & 23 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 23 & -12 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & -12 & 23 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 23 & -12 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & -12 & 23 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & 23 & -12 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 2 & 2 & -12 & 23 \end{pmatrix}$

Exercice:

1° $D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$ et en faisant la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sur les lignes et sur les colonnes, on trouve:

$$D_4 = \epsilon(\sigma)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

2° On trouve: $D_{2n} = \det A \cdot \det B$.

On fait la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & \dots & 2n \end{pmatrix}$ sur les lignes et les

colonnes on trouve: $D_{2n} = \epsilon(\sigma)^2 \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$.