

Problème :

On considère l'ensemble E des fonctions bornées, définies sur $\mathbb{R}$, nulles en dehors d'un intervalle fermé borné et de valeur absolue intégrable sur cet intervalle.

I

Soient f et g deux fonctions de E , respectivement nulles à l'extérieur des intervalles : $[a, b]$ et $[c, d]$. On désigne par $f \star g$ la fonction qui à tout point x de la droite réelle $\mathbb{R}$ associe :

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

(On remarquera que cette intégrale se ramène à une intégrale sur un intervalle fini.)

1° Montrer que la fonction $f \star g$ est nulle en dehors de l'intervalle $]c+a, d+b[$.

2° Montrer que $f \star g = g \star f$. (Penser à un changement de variable.)

3° Calculer $f \star g$ lorsque f et g sont respectivement les fonctions caractéristiques des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$. (On supposera $b-a \geq d-c$.)

Tracer la courbe représentative de cette fonction.

(On rappelle que f est la fonction caractéristique de $[a, b]$ si $f(x) = 0$ pour x extérieur à cet intervalle et 1 si $x \in [a, b]$.)

II

Pour tout t de $\mathbb{R}$ et tout f de E , on définit la fonction Tf par :

$$Tf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx.$$

1° a Pour $u \in [\alpha, \beta]$, α et β réels, montrer qu'il existe une constante M ne dépendant que de α et β telle que :

$$|e^u - 1 - u| \leq Mu^2 \quad (\text{utiliser la formule de Taylor.})$$

b En utilisant la question a précédente, démontrer que Tf admet pour dérivées première la fonction :

$$\Lambda(t) = (Tf)'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -xe^{-tx} f(x) dx.$$

(étudier : $Tf(t+h) - Tf(t) - h\Lambda(t)$.)

et pour dérivée seconde :

$$(Tf)''(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-tx} f(x) dx.$$

2° a Lorsque f et g sont des fonctions caractéristiques d'intervalles, calculer Tf , Tg , $T(f \star g)$.

b Lorsque f et g sont des sommes finies de fonctions caractéristiques d'intervalles, montrer que : $T(f \star g) = Tf \cdot Tg$.

(Utiliser a, la linéarité de T et la bilinéarité de $g \star f$.)

On admettra que cette propriété est vraie pour toutes les fonctions f et g de E (Théorème de Borel.).