

3° On suppose, dans cette question, que la fonction satisfait à la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

On définit par récurrence les fonctions :

$$f^{n+1} = x f^n \text{ pour } n \geq 1 \text{ avec } f^1 = f.$$

a On pose : $m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x f^n(x) dx$ et $v_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^n(x) dx = m_n^2$.

En utilisant II, 1° et 2°, vérifier que $m_n = n m_1$ et $v_n = n m_1$.

b On pose : $k_n(x) = n f^n(nx)$.

Montrer que $Tk_n(t) = (Tf(\frac{t}{n}))^n$. En déduire, pour tout t de $\mathbb{R}$, la limite de $Tk_n(t)$ quand n tend vers l'infini. (Utiliser Taylor-Young).

c On pose : $h_n(x) = \sqrt{n} f^n(\sqrt{n} x)$. Dans le cas où $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0$, calculer pour tout t de $\mathbb{R}$ la limite de $Th_n(t)$ quand n tend vers l'infini. (d'après Saint-Cloud 79 P')

Exercices :

I Chercher la primitive de $f(x) = \frac{x^2}{(2-x^3)\sqrt{1-x^3}}$ et de $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2+tg^2x}}$.

II Chercher $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ où : $u_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}}$ (se ramener à une somme de Riemann)

Idée du barème :

Problème : 15,5 I 4 1° 1 2° 0,5 3) 2,5 II 11,5 1° a 1 b 2 2° a 1 b 1,5 3° a 2 b 2 c 2

Exercices : 4,5 I 1,5 f 0,5 g 1 II 2