

17 a). $T1_{[0,1]}(t) = \frac{1}{t}(e^{-t^2} - e^{-1})$; $T1_{[0,0]}(t) = \frac{1}{t}(e^{-t^2} - e^{-0})$ (si $t \neq 0$).

$T(1_{[0,1]} * 1_{[0,1]})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [n - (n-x)]e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x)e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x)e^{-x^2} dx = \frac{1}{t}(e^{-t^2} - e^{-1})(e^{-t^2} - e^{-1})$

On a donc : $T(1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}) = T1_{[0,1]} * T1_{[0,1]}$.

b). $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{A_i}$; $g = \sum_{j=1}^p \mu_j 1_{B_j}$. alors :

$T(f * g) = T(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j 1_{A_i} * 1_{B_j}) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j T(1_{A_i} * 1_{B_j}) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j T1_{A_i} * T1_{B_j}$
 $= (\sum_{i=1}^n \lambda_i T1_{A_i}) (\sum_{j=1}^p \mu_j T1_{B_j}) = Tf * Tg$.

37 a). $m_n = -(Tf^{(n)})'(0)$ or $Tf^{(n)} = (Tf)^n \Rightarrow (Tf^{(n)})' = n(Tf)^{n-1}(Tf)'$
 or comme par hypothèse : $Tf(0) = 1$, on obtient : $m_n = -[n \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx] m_{n-1}$
 $v_n = (Tf^{(n)})''(0) - m_n^2 = n(n-1)[Tf(0)]^2 + n(Tf)''(0) = n(n-1)m_2^2 + n(v_2 + m_2^2) - n^2 m_2^2$
 $= n v_2$.

b). $Th_n(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{n}x} f^{(n)}(nx) n dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{n}u} f^{(n)}(u) du = (Tf^{(n)})\left(\frac{t}{n}\right) = (Tf)^n\left(\frac{t}{n}\right)$.

T.Y. : $Tf\left(\frac{t}{n}\right) = Tf(0) + \frac{t}{n}(Tf)'(0) + o\left(\frac{t}{n}\right)$ donc $Tf(0) = 1$ donc, la limite

de : $n \log Tf\left(\frac{t}{n}\right)$ est égale à $t(Tf)'(0)$ d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} Th_n(t) = e^{t(Tf)'(0)}$.

c). $Th_n(t) = (Tf)^n\left(\frac{t}{n}\right)$.

T.Y. : $Tf\left(\frac{t}{n}\right) = Tf(0) + \frac{t}{n}(Tf)'(0) + \frac{t^2}{2n}(Tf)''(0) + o\left(\frac{t}{n}\right)$ Or : $Tf(0) = 1$
 donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Th_n(t) = e^{\frac{t^2}{2}(Tf)''(0)}$ si $(Tf)'(0) = 0$.

Exercices :

I. f : on pose : $t = \sqrt{1-x^2}$. $\Rightarrow \int f(x) dx = -\frac{2}{3} \int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{2}{3} \text{Arctg}(\sqrt{1-x^2}) + C$.

g : on pose : $u = \lg x \Rightarrow \int g(x) dx = I = \int \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{2x+1})^2} = \int \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{2x+1})^2} = \int \frac{dx}{1 + 2e^{2u}}$

on : $1 + 2e^{2u} = 1 + 2\frac{e^{2u}}{1+e^{2u}} = \frac{1+e^{2u}}{1+e^{2u}} \Rightarrow I = \int \frac{(1+e^{2u}) du}{1+e^{2u}} = \text{Arctg}(e^u) + C$

et $e^u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int g(x) dx = \text{Arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C = E \text{Arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$

II. On a : $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} < \frac{1}{n+2}$ $\Rightarrow v_n < u_n < w_n$.

or : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ et $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \log 2$.

Corrigé du devoir

Problème:

I.

1°) Si $x \leq a+c$, alors: $x-y \leq a+c-y$.

3 cas: i) $y > a$: $\Rightarrow a+c-y < c \Rightarrow x-y < c$, d'où $g(x-y) = 0$.

ii) $y < a$: $\Rightarrow f(y) = 0$.

iii) $y = a$: alors, $f(y) \cdot g(x-y)$ est nul sur $[a, b]$ sauf peut-être en a .
donc, dans tous les cas, on a: $f(y) \cdot g(x-y) = 0$ (sauf en a), et par conséquent, l'intégrale de cette fonction est nulle.

si $x \geq b+d$, on étudiera la position de y / b et on obtiendra la même conclusion.

2°) Dans l'expression de $f * g$, posons $u = x-y \Rightarrow f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u) g(u) du$.
 $= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) f(x-u) du = g * f(x)$. (A.T. on a droit de faire ce changement de variable).

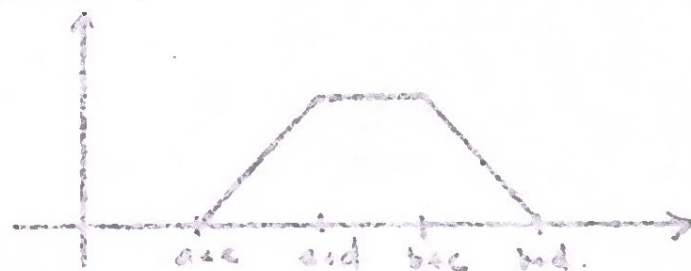
3°) $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[a,b]} f(y) \times \frac{1}{[c,d]} (x-y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[a,b]} f(y) \cdot \frac{1}{[c,d]} (x-y) dy$.
 $= w([a,b] \cap [x-d, x-c])$, d'où le résultat:

i) $x \notin [a+c, b+d]$: $f * g(x) = 0$.

ii) $x \in [a+c, a+d]$: $f * g(x) = x - (a+c)$.

iii) $x \in [a+d, b+c]$: $f * g(x) = d+c$.

iv) $x \in [b+c, b+d]$: $f * g(x) = b+d-x$.



II.

1°) a). Formule de Taylor-Lagrange: $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} e^{\theta u}$: $\theta \in [0, 1]$.

or $u \in [a, b]$, $\Rightarrow \theta u \in [0, \theta b] \Rightarrow e^{\theta u} \leq e^{\theta b} \leq \sup_{t \in [0, b]} (e^t) = M_2$

d'où: $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} M_2 = u^2 M$.

b). Soit $\Delta(h) = T(f(t, h)) - T(f(t))$, $h = A(t)$; pour montrer que Tf est différentiable en t , il faut et il suffit que: $\Delta(h) = o(h)$.

Or $\Delta(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-tx} (e^{-hx} - 1 + hx) dx$.

Mais, $x \in [a, b]$ et on peut choisir $h \in [-1, +1]$, donc, $-hx \in [-b, b]$

où: $\alpha = \inf(-|a|, -|b|)$ et $\beta = \sup(|a|, |b|)$; par conséquent, $\exists M$, indépendant de x et de h , tel que: $|e^{-hx} - 1 - (-hx)| \leq e^{\beta} x^2 M$.

Donc $|\Delta(h)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot e^{-tx} \cdot M h^2 x^2 dx = h^2 \cdot B$. (B indépendant de h).
 $= o(h)$.

$\Rightarrow (Tf)'(t) = A(t)$.

Pour la dérivée seconde, on pose: $g(x) = -x f(x)$, d'où: $(Tf)''(t) = (Tg)(t)$.

Donc, $(Tf)'$ est dérivable et $(Tf)''(t) = (Tg)'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-tx} f(x) dx$.