

Mercure 19/3/80

I - Etude des courbes :

$$\begin{cases} x = \frac{t-1}{t^3-1} \\ y = \frac{t^2-m}{t^3-1} \end{cases}$$

$m \neq 1$; on appelle C_m la courbe représentative.

- 1°) Pour $m \leq 1$, donner les tableaux de variation en distinguant les différents cas. (On remarquera que si $x'(t) = 0$ alors $y'(1/t) = 0$).
- 2°) Etudier les branches infinies en précisant la position de la courbe par rapport à celles-ci. *comme ci*
- 3°) Montrer soigneusement que la recherche des points doubles est équivalente à la résolution de l'équation : $t^2 - \frac{m+1}{m}t + 1 = 0$.
- 4°) Chercher l'équation donnant les points d'inflexion. Préciser leur nombre en fonction des valeurs de m .
- 5°) Soit $M_1(t_1), M_2(t_2), M_3(t_3)$ trois points de C_m ; en écrivant la droite d'alignement de ces trois points sous la forme $ux+vy+w=0$, trouver la C.E.S. pour que ces trois points soient alignés. Retrouver ainsi l'équation donnant les (ou le) points d'inflexion. ~~Montrer qu'ils sont alignés (dans le cas où il y en a 3) ; décrire la droite d'alignement.~~
- 6°) Etudier la courbe correspondant à $m = -1/3$; préciser la position locale de celle-ci quand $t = -1$ et quand t tend vers l'infini. Tracer soigneusement la représentation graphique.

II - On note $E = \left\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; \begin{array}{l} \exists (x, a) \in \mathbb{R}^2 : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\}$

1°) Montrer que E est un espace vectoriel.

2°) On définit :

$$B(f, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} f(x)g(x)dx.$$

On admettra que $B(1, 1) = 1$.

a. Montrez que si $(f, g) \in E^2$, $B(f, g)$ existe.

b. Montrer que si la forme bilinéaire B est non dégénérée positive.

3°) a. Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n , tel que :

$$(e^{-x^2/2})^{(n)}(x) = e^{-x^2/2} P_n(x).$$

Donner la relation entre P_n, P'_{n-1}, P_{n-1} . Parité ? Coef. du terme de plus haut degré ?

b. On note $R_n(x)$ l'ensemble des fonctions polynômiales de degré $\leq n$.

Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale pour B de $R_n(x)$. (On sait que $R_n(x) \subset E$). (On montrera soigneusement que si $\deg Q \leq k$ alors $B(P_k, Q) = 0$ en faisant des intégrations par parties successives). Calculer $B(P_k, P_k)$.

4°) On veut montrer la relation : $P_{k+1} + xP_k + kP_{k-1} = 0$. On sait (3°a) que $\deg(P_{k+1} + xP_k) \leq k$, donc on peut écrire :