

$P_{k+1} + xP_k = a_k P_k + a_{k-1} P_{k-1} + \dots + a_0$. En calculant $B(P_{k+1} + xP_k, P_1)$, montrer que $a_i = 0$ si $i \in [0, k] - \{k-1\}$ et que $a_{k-1} = -k$.

5°) On pose, si $f \in E$:

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} P_k(x) f(x) dx$$

Soit $P = \sum_{k=0}^n x_k P_k$; montrer que P est la projection orthogonale de f sur $R_n(x)$. En déduire l'inégalité :

$$\sum_{k=0}^n k! x_k^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} f^2(x) dx.$$

Quelle est la limite de l'expression : $\frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} P_n(x) f(x) dx$? ($n \rightarrow +\infty$).

Idée du barème :

I 10,5 1° 2 2° 1,5 3° 2 4° 1,5 5° 2 6° 1,5 II 9,5 1° 1 2° 1,5 3° 3 4° 2 5° 2.