

Correction du dernier exercice :

1°/ $m < 1$. $x'(t) = \frac{-2t^3 + 3mt^2 - 1}{(t^3 - 1)^2}$, $y'(t) = \frac{t(-t^3 + 3mt - 2)}{(t^3 - 1)^2}$

Pour étudier le signe de x' , il faut distinguer les cas $m > 0$ et $m < 0$, mais on trouve le même résultat : 1 seule racine $t_1 < 0$.

Pour y' , il y a la racine évidente 0 et $1/t_1$ ($x'(1/t_1) = 0 \Leftrightarrow y'(t) = 0$ si $t \neq 0$)

Il faut comparer maintenant t_1 et $1/t_1$; en fait, il suffit d'étudier leur position par rapport à -1 : d'où 3 cas :

$1 + 3m > 0 \Leftrightarrow 1/t_1 < -1 < t_1 < 0$; $1 + 3m = 0$, $t_1 = -1 = 1/t_1$; $1 + 3m < 0$: $t_1 < -1 < 1/t_1 < 0$

Tableaux de variations :

$m > -1/3$

t	$-\infty$	$1/t_1$	t_1	0	1	$+\infty$
x'	+	+	0	-	-	-
y'	+	+	0	-	-	-
xy'	+	+	0	-	-	-

$m = -1/3$

t	$-\infty$	t_1	$1/t_1$	0	1	$+\infty$
x'	+	+	0	-	-	-
y'	+	+	0	-	-	-
xy'	+	+	0	-	-	-

$m < -1/3$

t	$-\infty$	1	0	t_1	$1/t_1$	$+\infty$
x'	+	+	0	-	-	-
y'	+	+	0	-	-	-
xy'	+	+	0	-	-	-

2°/ $y - x = \frac{t^2 - t}{t^3 - 1} = \frac{t}{t^3 + 1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}T^2 + o(T)$ si $T = t - 1$.

(reste toujours en dessous).

3°/ Points doubles : on trouve : $\begin{cases} P^2 - m(S^2 - P) + S = 0 \\ PS - m(S^2 - P) + 1 = 0 \end{cases}$; on fait la diff. on trouve :

$P = 1$ ou $P + 1 - S = 0$: $P = 1 \Rightarrow \begin{cases} S = 1 \text{ impossible} \\ S = \frac{m+1}{m} \end{cases}$; donne l'équation demandée.

et $S = P + 1 \Rightarrow P^2 + P + 1 = 0$ impossible. on trouve : $x = \frac{m}{m+2}$ et $y = \frac{m+1}{m+2}$.

4°/ Points d'inflexion :

on annule le déterminant : $\begin{vmatrix} -2t^3 + 3mt^2 - 1 & -6t^2 + 6mt \\ -t^4 + 3mt^2 - 2t & -4t^3 + 6mt - 2 \end{vmatrix} = 2(t^3 - 1)(t^3 - 3mt^2 + 3mt - 1)$

d'où l'équation donnant les points d'inflexion :

$t^3 - 3mt^2 + 3mt - 1 = 0$ or, $t = 1$ est racine $\Leftrightarrow t^2 + (1 - 3m)t + 1 = 0$

$\Delta = 3(m - 1)(3m + 1)$ si $m > 1$ ou $m < -1/3$: 2 p^{ts} d'inflexions.

$m = -1/3$: p^r stationnaire.

$-1/3 < m < 1$: aucun point d'inflexion.

5°/ $un + vy + w = 0 \Rightarrow wt^3 + vt^2 + ut - w - um - um = 0$.

$\sigma_1 = -\frac{v}{w}$; $\sigma_2 = \frac{u}{w}$, $\sigma_3 = 1 + m\frac{v}{w} + m\frac{u}{w} \Rightarrow \sigma_3 - m\sigma_2 + m\sigma_1 - 1 = 0$.

Réciproque : la droite passant par M_1, M_2 recoupe C_m en M'_3 et en a :

$\begin{cases} \sigma_3 - m\sigma_2 + m\sigma_1 - 1 = 0 \\ \sigma'_3 - m\sigma'_2 + m\sigma'_1 - 1 = 0 \end{cases}$ et si $t_3 \neq t'_3 \Leftrightarrow \begin{cases} P - mS + m = 0 \\ -mP + mS - 1 = 0 \end{cases}$ ($P = t, t_2$; $S = t + t_2$).

$\Leftrightarrow P = 1, S = \frac{m+1}{m}$, on retrouve le

Or comme on a supposé $M_1 \neq M_2$, ce cas est à écarter (point double), donc, on trouve bien $t_3 = t'_3$ c.q.f.d.