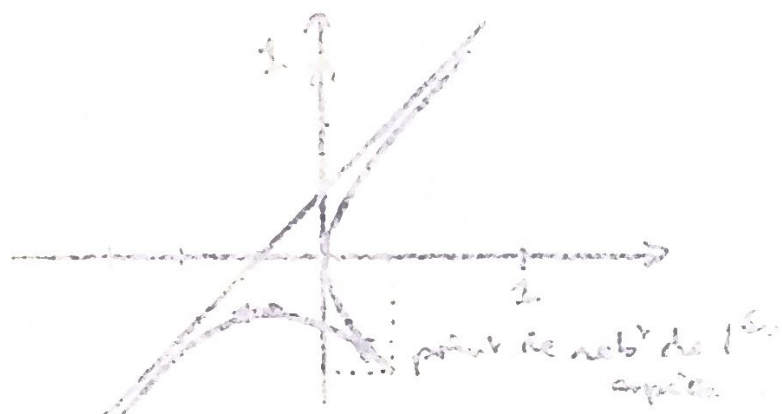




II

1°. $f \rightarrow (f, g)$ par $df + \mu g$,
 $g \rightarrow (g, f)$ et on lit le résultat.

$$a'' = \inf(a, a')$$

$$a' = \sup(a, a'')$$

2°. a) En $+\infty$: $x^2 e^{-x^2/2} f(x) g(x) = (x^2 e^{-x^2/2} \cdot e^{-x^2/2} \cdot e^{x^2/2} f(x) \cdot e^{x^2/2} g(x))$.
 Comme chacune des quantités figurant dans les parenthèses tend vers 0,
 il y a convergence en $+\infty$ (idem en $-\infty$).

b). B : bilinéaire positive : immédiat.

B non dégénérée : si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} f(x) dx = 0$, comme f est continue, nécessairement, f est nulle. (En fait, on démontre le contraire).

3°. a). Par récurrence sur n : $(e^{-x^2/2})' = -x e^{-x^2/2} \Rightarrow P_1(x) = -x$.

$$(e^{-x^2/2})^{(n)} = (e^{-x^2/2} P_{n-1}(x))' = e^{-x^2/2} (-x P_{n-1}(x) + P_{n-1}'(x)) \text{ d'où la rel. de rec.}$$

$$P_n = -x P_{n-1} + P_{n-1}' \text{ . On a immédiatement :}$$

$$\deg P_n = n, \text{ Parité de } P_n = \text{parité de } n, \text{ val. de } x^n = (-1)^n.$$

$$b). B(P_k, Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} P_k(x) Q(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-x^2/2})^{(k)} Q(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(e^{-x^2/2})^{(k-1)} Q(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

et par récurrence,

$$B(P_k, Q) = (-1)^k B(P_{k-1}, Q^{(1)}); \text{ pour } k = k_2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-x^2/2})^{(k-1)} Q(x) dx = 0 \Rightarrow B(P_k, Q) = 0$$

Montrons que $B(P_k, P_k) = 0$ si $k \neq k_2$: on peut supposer $k < k_2$ et alors, on applique le résultat que l'on vient de démontrer. Donc, on a bien $B(P_k, P_k) = 0$ si $k \neq k_2$.

$$B(P_k, P_k) = (-1)^k B(1, P_k^{(k)}) \text{ or : } P_k^{(k)} = (-1)^k k! \Rightarrow B(P_k, P_k) = k!.$$

$$4°. B(P_{k+1} + x P_k, P_i) = B(P_{k+1}, P_i) + B(x P_k, P_i) = 0 \text{ si } i+1 < k_2. \text{ (deg}(P_i) < k_2) \\ = 0 \text{ si } i = k_2 \text{ : car on intègre d' } \\ \text{let. impair de } -\infty \text{ à } +\infty.$$

$$\text{si } i = k_2 - 1, B(P_{k+1}, P_i) = -k!.$$

$$\text{(en effet : } x P_k = -P_{k+1} + Q, \text{ deg } Q < k_2 \Rightarrow a_i = 0 \text{ si } i \neq k_2 - 1 \text{ et } a_{k_2-1} = -k.)$$

5°. On a : $B(f - P, P_k) = 0$ si $k \in [0, n]$; ces relations caractérisent le proj. 1. de f sur $R_n(x)$. On a alors : $B(f, f) = B(f - P, f - P) = B(P, P)$.

$$\text{i.e. } B(f, f) \geq B(P, P) \text{ inégalité demandée.}$$

Il reste : $\sum_{k=0}^{\infty} k! x_k^2$ est une série majorée, donc convergente; par conséquent, $u_n \rightarrow 0$ i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} x_n^2 \rightarrow 0$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} x_n \rightarrow 0$) donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} P_n(x) f(x) dx = 0.$$