

Problème I :

Soit l'équation différentielle : $xy \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - ny \frac{dy}{dx} = 0 (E)$ où y est la fonction inconnue et x la variable réelle. (n entier positif)

I - Montrer que cette équation admet la solution particulière définie paramétriquement par les relations : $x = \operatorname{tg} t$, $y = \cos^2 t$. ($n = 1$)

II - Montrer que l'équation différentielle (E) demeure invariante :

a) lorsque l'on change x en Cx , C étant une constante non nulle.

b) lorsque l'on remplace y par Cy , C étant une constante non nulle.

2 On se propose de chercher les intégrales générales de l'équation (E). A cet effet, on utilisera les deux méthodes suivantes :

a) On effectue le changement de variable : $x = e^t$ ($x > 0$).

Former l'équation différentielle (E_1) que satisfait alors la fonction y considérée comme fonction de t . En supposant $y \neq 0$, intégrer (E_1) en posant $u = 1/y$. En déduire l'intégrale générale de (E). (x de signe quelconque)

b) On fait le changement de fonction inconnue : $y = e^z$.

Former l'équation différentielle (E_2) que satisfait la fonction z . Pour trouver l'intégrale générale de cette équation, on suggère de poser $w = 1/z$. En déduire à nouveau l'intégrale générale de (E).

3 En posant $n = 1$, retrouver le résultat du I.

4 Cherchez les fonctions continues sur le plus grand intervalle qui satisfont aux conditions : $y(0) = 1$, $y'(1) = -\frac{n+1}{4}$.

d'après : Ecole de l'air 78.

Problème II :

Soit (C_m) l'ensemble des points du plan affine euclidien vérifiant la relation : $r^2 = \cos 2\theta + m$. ($r > 0$) m désigne un paramètre réel.

I - 1 Pour quelles valeurs de m la courbe C_m existe-t-elle ?

2 Identifier et construire la courbe C_1 .

3 Etudier et construire la courbe C_0 .

4 Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que, par M , il passe une courbe C_m dont la tangente en M est parallèle à $\vec{i}$.

II - Trouver l'équation différentielle de la famille de courbes C_m ; on l'écrira sous la forme : $f(x, y, dx, dy) = 0$.

Retrouver les résultats du I-4.

d'après E.N.S.I.E.T.A. 78.

Exercice I : a et b sont des paramètres réels ; trouver l'équation différentielle linéaire à coefficients constants admettant pour solutions :

$$y = (1/6)xe^{-2x}\sin 3x + e^{-2x}(a\cos 3x + b\sin 3x).$$

Exercice II : Résoudre l'équation différentielle linéaire :

$$(1-x^2)y' + xy = \frac{2x}{1+x^2}; \text{ on précisera l'ensemble } E \text{ des solutions continues sur } R, \text{ et } \frac{2x}{1+x^2} \text{ l'ensemble } E' \text{ des}$$