

Problème I.

I. On a : $dy = -2\omega \sin v dr$, $dx = \frac{dr}{\cos^2 v}$ d'où : $\frac{dy}{dx} = -2\omega^3 t \sin t$.

Puis : $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dr}{dx} = 2\omega^4 t (3 - 4\omega^2 t)$.

On remplace ces expressions dans (E) ($n=1$) et on a bien la solution.

II. 1°. a). Montrons que, si $y(x)$ est solution de (E), alors, $y(Cx)$ est aussi solution de (E) : $y_1(x) = y(Cx)$ alors : $\frac{dy_1}{dx}(x) = C \cdot \frac{dy}{dx}(Cx)$

et $\frac{d^2 y_1}{dx^2} = C^2 \frac{d^2 y}{dx^2}(Cx)$; d'où :

$$x \cdot y_1(x) \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2}(x) - 2x \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2(x) - n y_1(x) \frac{dy_1}{dx}(x) =$$

$$C \left(Cx \cdot y(Cx) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}(Cx) - 2 \cdot Cx \left(\frac{dy}{dx} \right)^2(Cx) - n \cdot y(Cx) \cdot \frac{dy}{dx}(Cx) \right) = 0.$$

b). Il faut montrer que, si $y(x)$ est solution de (E), alors, $C \cdot y(x)$ est aussi solution de (E); là, la seule démonstration est immédiate.

2°. a). On peut toujours se ramener à $x > 0$, en prenant éventuellement $C = -1$ (II. 1°. a). ($x \neq 0$).

D'où : (E₁) : $y \frac{d^2 y}{dx^2} - (n+1) y \frac{dy}{dx} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$

Et, si $y \neq 0$, $u = \frac{1}{y}$ (E₁) $u'' - (n+1)u' = 0 \Leftrightarrow u = a e^{(n+1)x} + b.$

Donc, pour $x > 0$, les solutions de (E) sont : $y = \frac{1}{ax^{n+1} + b}$ ($x \neq \left(\frac{-b}{a} \right)^{\frac{1}{n+1}}$)

Pour $x < 0$, on aura la même chose, avec, éventuellement $\left(\frac{-b}{a} \right)^{\frac{1}{n+1}}$ lorsque C est un nombre positif.

(On remarque que $y = 0$ est solution particulière).

b). même remarque qu'au a avec $y = e^z$.

On trouve (E₂) : $x \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} - x \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 - n \cdot \frac{dz}{dx} = 0$. et, en posant

$v = \frac{1}{z}$, (E₂) $x v' + n v = -x$. d'où : $v = \frac{(n+1)a - x^{n+1}}{(n+1)x^n}$.

et : $z = -\log \left| \frac{x^{n+1} - a(n+1)}{C} \right|$ et enfin : $y = \frac{C}{x^{n+1} - a(n+1)}$; on retrouve le même résultat

3°. Pour $n=1$, on sait que : $\omega^2 r = \frac{1}{1+v_g^2 r} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2+1}$ qui au a.

ou $y = \frac{1}{x^2+1}$, si l'on prend le résultat sous la forme donnée au 2° a, correspond à $a = b = 1$.

4°. On trouve ici : $y = \frac{1}{x^{n+1} + 1}$ avec $x \neq -1$ si n est pair.