

Problème II -

I. 1. Il faut $m \geq -1$. (Pour $m = -1$, on obtient un seul point: 0).

$$2. C_1: r^2 = \cos 2\theta + 1 = 2 \cos^2 \theta \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \cos \theta, & \theta \in [-\pi/2, +\pi/2] \\ r = -\sqrt{2} \cos \theta, & \theta \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases}$$

C_1 : réunion de 2 cercles de rayon $1/\sqrt{2}$, centrés sur Ox (dessin à faire).

3. $C_0: r^2 = \cos 2\theta$: lemniscate de Bernoulli.

4. La tangente en M est parallèle à $\vec{xi}$: $V = -\theta [\pi]$

$$\Leftrightarrow \text{tg } V = -\text{tg } \theta \Leftrightarrow \frac{r}{r'} = \frac{m + \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = +\text{tg } \theta \Leftrightarrow m = 1 - 2 \cos 2\theta.$$

D'où, l'ensemble des points M est l'ensemble des points vérifiant:

$$r^2 = \cos 2\theta + m \text{ et } m = 1 - 2 \cos 2\theta \Leftrightarrow r^2 = 2 \sin^2 \theta \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \sin \theta, & \theta \in [0, \pi] \\ r = -\sqrt{2} \sin \theta, & \theta \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

(c'est la réunion de 2 cercles de rayon $1/\sqrt{2}$ centrés sur Oy).

II. On a: $m = r^2 - \cos 2\theta$. D'où l'équation différentielle:

$$r dr - 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = 0.$$

$$\text{Or: } r dr = x dx + y dy \text{ et } d\theta = \frac{x dy - y dx}{r^2}.$$

Donc, l'équation différentielle de la famille de courbes va s'écrire:

$$x dx + y dy + \frac{2xy(x dy - y dx)}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Pour que la tangente soit parallèle à Ox, il faut et il suffit que: $\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow x \left(1 - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0$ $x = 0$ n'est pas solution.

D'où: $x^2 + y^2 = \pm y \sqrt{2}$: c'est bien l'équation des 2 cercles.

Exercice I: Équation homogène: $y'' + 4y' + 13y = 0$.

d'où l'équation différentielle vérifiée par y:

$$y'' + 4y' + 13y = e^{-2x} \cos 3x.$$

Exercice II: Ensemble des solutions de l'équation homogène:

$y = \lambda \sqrt{|1-x^2|}$; en faisant varier la constante:

$$\lambda' = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{|1-x^2|}} \Rightarrow \lambda = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{|1-x^2|}} + C.$$

$$\text{D'où: } x < -1: y = \sqrt{1+x^2} + \lambda_1 \sqrt{|1-x^2|}.$$

$$-1 < x < 1: y = \sqrt{1+x^2} + \lambda_2 \sqrt{1-x^2}$$

$$x > 1: y = \sqrt{1+x^2} + \lambda_3 \sqrt{x^2-1}.$$

Les solutions sont continues sur $\mathbb{R}$.

La seule solution dérivable sur $\mathbb{R}$ est la fonction: $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.