

Problème I :

Soit G un groupe avec une loi notée multiplicativement ; e est l'élément neutre.

1° Soit $f: G \rightarrow G$ définie par $f(x) = x^{-1}$; montrer l'équivalence : G abélien $\Leftrightarrow f$ automorphisme.

2° On suppose dans cette question que : $\forall x \in G, x^2 = e$.

a) Démontrer que G est abélien.

b) Soit H un sous-groupe de G et a un élément de G n'appartenant pas à H , On rappelle que $a.H = \{a.x, x \in H\}$.

i) Montrer que $H \cap a.H = \emptyset$ et que $H \cup a.H$ est un sous-groupe de G .

ii) Lorsque H a un cardinal fini, comparer les cardinaux de H et de $a.H$. En déduire que : si G est fini, card G est une puissance de 2.

Problème II :

Soit E un ensemble totalement ordonné à n éléments ; on veut calculer le nombre $P(n, k)$ de parties de E comportant k éléments tels que 2 quelconques ne soient pas des éléments consécutifs de E .

1° Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$, écrire toutes les parties à 2 éléments vérifiant la condition ci-dessus.

2° Calculer les valeurs de $P(n, 1)$ et de $P(n, 2)$. Pour n donné, quelle est la plus grande valeur de k telle que $P(n, k)$ ne soit pas nul ?

3° En distinguant, dans les parties étudiées, celles qui contiennent le 1^{er} élément de E et celles qui ne le contiennent pas, montrer la relation : $P(n, k) = P(n-1, k) + P(n-2, k-1)$.

4° En déduire $P(n, 3)$, puis par récurrence $P(n, k)$.

Problème III :

Soit $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; on définit sur $L = K^2$ les 2 lois : $+$ et $\cdot$ par :

$$(a, b) + (a', b') = (a+a', b+b') \quad \text{et} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b)$$

1° Montrer rapidement que $(L, +, \cdot)$ est un corps commutatif et que $\varphi: K \rightarrow L$ définie par $\varphi(a, 0) = a$ est un homomorphisme injectif de corps.

2° Montrer que tout automorphisme de L laisse invariant tout élément de $K \times \{0\}$. Quels sont les automorphismes de L ? Montrer qu'ils forment un groupe et donner un groupe simple isomorphe.

3° Résoudre, dans L , les équations suivantes :

a) $x^2 = (2, 0)$

b) $x^2 = (3, 0)$

Idees du Barème : I : (7) 1° 1,5 2° a) 1 b) 4,5 ^{2° i) 1,5} 3° 3

II : (7) 1° 1 2° 2 3° 1,5 4° 2,5

III : (6) 1° 1,5 2° 2 3° 2,5