

Problème I

1°. $f(x) = x^{-1}$. On a : $f(x^{-1}y^{-1}) = (x^{-1}y^{-1})^{-1} = y \cdot x = f(y^{-1}) \cdot f(x^{-1}) = xy$.

Donc : f automorphisme $\Rightarrow G$ commutatif.

Si G est commutatif : $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \Rightarrow f$ automorphisme (f bijectif).

2°. $\forall x \in G, x^2 = e \Leftrightarrow \forall x \in G, x = x^{-1} \Rightarrow f(x) = x$: f est un automorphisme a). $\Rightarrow G$ commutatif.

b) i) $H \cap aH = \emptyset$? : Soit : $x \in H \cap aH \Rightarrow x = h$ et $x = a \cdot h'$

d'où : $a = h \cdot h'^{-1} \in H$ impossible ;

$H \cap aH \neq \emptyset$? : Stabilité : 3 cas : $\begin{cases} (x, y) \in H^2 \Rightarrow xy \in H \subset H \cup aH \\ (x, y) \in H \times aH, xy = h \cdot a \cdot h' = a \cdot h \cdot h' \in aH \\ (x, y) \in aH \times aH, xy = a \cdot h \cdot a \cdot h' = a^2 \cdot h \cdot h' = a \cdot h \cdot h' \in aH \end{cases}$

Symétrique : $x \in H$ évident.

$x \in aH$: $x = a \cdot h \Rightarrow x^{-1} = x = a \cdot h$ (1°)

(c). On va construire une suite de s.g. de G , de cardinal $\sqrt[n]{2^n} = 2^{n/n}$.

Si $G = \{e\}$ terminé, sinon : $a \neq e \Rightarrow \{e, a\}$ s.g. de $G = H_1$.

A nouveau : 2 cas : $\begin{cases} G = \{e, a\} = H_1 \text{ terminé.} \\ G \neq H_1 \Rightarrow \exists a_2 \notin H_1 ; \text{ on pose alors : } H_2 = H_1 \cup a_2 H_1 \end{cases}$

Par récurrence, on aura H_k : $\text{card } H_k = 2^k$.

2 cas : $\begin{cases} G = H_k \text{ terminé.} \\ G \neq H_k \Rightarrow \exists a_{k+1} \notin H_k ; \text{ on pose alors : } H_{k+1} = H_k \cup a_{k+1} H_k \end{cases}$

Soi $\nexists n$: $G = H_n$, alors, on aura : $\text{card } G \geq 2^n$ ce qui est impossible

donc : $G = H_n \Rightarrow \text{card } G = 2^n$ (G fini).

Problème II :

1°. $A_2 = \{(1,3), (1,4), (2,4)\} \Rightarrow P(4,2) = 3$.

2°. n pair : valeur maxi = $\frac{n}{2}$.

n impair : " " = $\frac{n+1}{2}$.

3°. $P(n,1) = n$ et $P(n,2) = (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = C_{n-1}^2$.

4°. On réalise une partition de A_k : $A_k = A_k' \cup A_k''$ où :

$A_k' = \{\text{suite qui commencent par le } 1^{\text{er}} \text{ élément}\}$; $A_k'' = \begin{pmatrix} A_k \\ A_k' \end{pmatrix}$

On a : $\text{card } A_k' = P(n-2, k-1)$ (il faut choisir $k-1$

termes parmi les $n-2$ derniers).

et $\text{card } A_k'' = P(n-1, k)$ (il faut choisir k termes parmi les $n-1$ derniers).

$P(n,3) = P(n-1,3) + P(n-2,2)$; $P(n,3) = C_{n-3}^2 + C_{n-4}^2 + \dots + C_3^2 + 1$

$P(n-1,3) = P(n-2,3) + P(n-3,2)$; $= C_{n-2}^3$

$P(6,3) = P(5,3) + P(4,2)$; (On utilise la formule : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$)

5°. On devine intuitivement que $P(n,k) = C_{n-k+1}^k$; on va donc montrer ce résultat par récurrence :