

Valoir pour $k=1, k=2, k=3$.

$$\text{On a : } P(n, k+1) = P(n-1, k+1) + C_{n-k-1}^k$$

$$\Rightarrow P(n, k+1) = C_{n-k-1}^k + C_{n-k-2}^k + \dots + C_{n-k-p}^k + \dots + 1 \\ = C_{n-k}^{k+1}$$

III. 1°/ $(L, +)$ groupe commutatif : neutre $(0, 0)$, sym. de $(a, b) : (-a, -b)$.

$(L - \{0, 0\}, \times)$ groupe commutatif : neutre $(1, 0)$; cherchons la symétrique

de (a, b) : L nous fait penser à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}(\sqrt{2})$, donc la symétrique

doit être nécessairement égal à $\left(\frac{a}{a^2-2b^2}, \frac{-b}{a^2-2b^2}\right)$; comme $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

est un corps, il reste à montrer que si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $a^2 - 2b^2 \neq 0$.

En effet, si $a^2 - 2b^2 = 0$, $b \neq 0 \Rightarrow 2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ or 2 n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, donc, ce n'est pas possible ; $b = 0 \Rightarrow a = 0$ impossible aussi.

$\times$ distributive / $+$.

2°/ Soit f un automorphisme de L .

On a nécessairement : $f(0, 0) = (0, 0)$ et $f(1, 0) = (1, 0)$.

donc, $f(a, 0) = \underbrace{(1, 0) + \dots + (1, 0)}_{a \text{ fois}} = (a, 0)$.

(Cherchons $f(0, 1)$: on a : $(0, 1)^2 = (2, 0)$ donc : $f(0, 1)^2 = (2, 0)$.

2 solutions ici : $f(0, 1) = (0, 1)$ et $f(0, 1) = (0, 4)$.

Donc, on aura en fait 2 automorphismes : $f = \text{id}$ et f défini par $f(a, b) = (a, 4b)$. Ils forment un groupe à 2 éléments isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

3°/ $x^2 = (2, 0)$: déjà fait, on trouve $x = (0, 1)$ ou $x = (0, 4)$.

$$x^2 = (3, 0) : x = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

$b = 0 \Rightarrow a^2 = 3$: impossible.

$b \neq 0$, $a = 0$: $2b^2 = 3 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2$ ou $b = 3$.

d'où : 2 solutions : $x = (0, 2)$ ou $x = (0, 3)$.