

Exercice I : Développée d'une développée

Soit (C_λ) la courbe d'équations
$$\begin{cases} x = \text{Log}(\sin \varphi) - \sin^2 \varphi + \lambda \sin \varphi \\ y = (\sin \varphi - \lambda) \cos \varphi \end{cases}$$

1°. Montrer que l'on obtient toute la courbe en faisant varier φ dans l'intervalle $]0, \pi/2]$ et une symétrie par rapport à Ox .

2°. On suppose par la suite $\lambda > 1$, (C_λ) est alors sans points stationnaires (admis)*. Chercher le repère de Frenet en un point de (C_λ) . Donner les équations paramétriques de la développée (A) de (C_λ) ; que remarque-t-on? Qu'en déduire?

3°. Trouver la développée de (A) .

* On pourra le démontrer (question subsidiaire).

Exercice II :

1°. Résoudre l'équation différentielle (E):

$$y'' - 2 \sin x y' + y = 2 \cos x \cos x$$

2°. On suppose $d = \frac{\pi}{2}$. Démontrer qu'il existe une solution et une seule f telle que : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. Soit (C) la courbe représentative de f .

3°. Calculer la longueur de l'arc de courbe pour $x \in [0, 1]$.

Exercice III :

Soit l'équation différentielle (F):

$$(x^2 + 1) y'' - 2x y' + 2y = (x^2 + 1)^2 e^x$$

1°. Trouver toutes les solutions polynômiales de l'équation homogène (H). (On cherchera P_1 et P_2 polynômes unitaires de degré ≤ 2 avec P_1 pair et P_2 impair).

2°. Donner alors toutes les solutions de (F).

Exercice IV : Énumérations sur l'équation d'Euler d'une courbe.

On rappelle qu'une courbe (C) sans points stationnaires (et autres hypothèses) peut être donnée par les équations normales de ses tangentes :

$$D_\theta : x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta).$$

Le point de tangence est obtenu en résolvant le système:

$$D_\theta = x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta)$$

$$D'_\theta = x \cos(\theta + \pi/2) + y \sin(\theta + \pi/2) = p'(\theta).$$