

Problème I :

Soit (C) une courbe de l'espace affine euclidien orienté de dimension 3. On appelle s l'abscisse curviligne sur (C).

1°) Soit $\vec{g} = \cos \theta \vec{N} + \sin \theta \vec{B}$; on pose $P = M + a(s)\vec{g}$. Montrer qu'une C.N.S. pour qu'il existe une fonction $a(s)$ telle que le lieu de P admette $\vec{g}$ comme vecteur directeur de la tangente est : $\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{T}$ (1)

Déterminer la fonction $a(s)$ correspondante.

2°) Par la suite (C) désignera l'hélice circulaire d'équations paramétriques : $x = k \cos t$, $y = k \sin t$, $z = ht$ avec $k > 0$.

Calculer l'abscisse curviligne s , la courbure et la torsion de (C) en fonction de t . Déterminer θ pour que la condition (1) soit vérifiée, θ et t s'annulant en même temps.

3°) On considère, en chaque point M de (C), ~~on~~ définit le point V par : $V = M + b(t)\vec{g}$. Former l'équation différentielle vérifiée par b pour que le lieu de V admette une tangente formant un angle constant avec $\vec{g}$. (On prendra l'angle θ calculé au 2°). On ne cherchera pas à l'intégrer.

Problème II : courbes de Bertrand (En dimension 3).

Soit γ un arc orienté de classe C^k ($k \geq 5$) régulier et sans points d'inflexion, défini par une paramétrisation normale $g : s \rightarrow M = g(s)$.

1°) Soit $u(s)$ une fonction numérique dérivable de s ; on pose :

$$M_1(s) = M(s) + u(s)\vec{N}$$

On suppose que l'arc orienté γ_1 décrit par M_1 admet, quelquesoit s , la même normale au point $M_1(s)$ que γ en $M(s)$. Et on note $\vec{T}_1$ la tangente unitaire en $M_1(s)$ à γ_1 .

Montrer que nécessairement, le produit scalaire $\vec{T} \cdot \vec{T}_1$ et la fonction u sont constants. En déduire qu'il existe des constantes réelles a et b telles que : $\frac{a}{R} + \frac{b}{T} = 1$ (1)

Le couple (a, b) est-il unique ?

Prouver en outre que si T_1 désigne la torsion de γ_1 en M_1 , la fonction $T \cdot T_1$ est constante.

2°) Réciproquement, on suppose qu'il existe des réels a et b tels que (1) soit vérifiée pour tout s , et on désigne par γ_1 l'arc orienté décrit par le point M_1 défini par : $M_1(s) = M(s) + a\vec{N}$.

Montrer que la normale principale en $M_1(s)$ ~~est égale~~ est égale à celle de γ en $M(s)$.

3°) On veut montrer que l'hélice circulaire est la seule courbe γ telle que R et T soient constants. On pose $k = \frac{1}{\sqrt{R^2 + T^2}} (RT + TB)$; montrer que k est un vecteur constant.