

I

1°. Compte tenu de la période de x et y (2π), du domaine de définition ($\sin \varphi > 0$), pour avoir la courbe totalement, il faut prendre $\varphi \in]0, \pi[$. Mais: $x(\pi - \varphi) = x(\varphi)$ et $y(\pi - \varphi) = -y(\varphi) \Rightarrow$ il suffit de faire l'étude sur $]0, \pi/2]$ et on aura toute la courbe γ en effectuant une symétrie / O x .

2°.
$$\begin{aligned} dx &= \left(1 + \frac{1 - 2\sin^2 \varphi}{\sin \varphi}\right) \cos \varphi d\varphi \\ dy &= \left(1 + \frac{1 - 2\sin^2 \varphi}{\sin \varphi}\right) \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$
 On prend $ds = \left(1 + \frac{1 - 2\sin^2 \varphi}{\sin \varphi}\right) d\varphi$ et on vérifie que: $\frac{ds}{d\varphi}(\pi/2) > 0$ et comme la courbe est sans points stationnaires, cela signifie que sur $]0, \pi/2]$, $\frac{ds}{d\varphi} > 0$.

D'où: $\alpha = \varphi: \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$ et $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\varphi} = \left(1 + \frac{1 - 2\sin^2 \varphi}{\sin \varphi}\right)$.

Comme $\vec{OT} = \vec{OM} + R \cdot \vec{N}$ on trouve:

(A):
$$\begin{cases} x = \text{Log}(\sin \varphi) - \cos^2 \varphi \\ y = -\sin \varphi \cos \varphi + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\cos^3 \varphi}{\sin \varphi} \end{cases}$$

Remarque: les équations paramétriques de (A) ne contiennent pas λ .

Conclusion: les courbes (C_λ) sont des développantes de (A).

3°. On trouve: $dx = -\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} (1 + 2\sin^2 \varphi) \cdot (-\sin \varphi) d\varphi$ $dy = \cos \varphi d\varphi$ $d\sigma = -\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} (1 + 2\sin^2 \varphi) d\varphi$

On vérifie en fait que: $d\sigma = dR$ (résultat du cours).

$\Rightarrow$ Equations paramétriques de (A) développée de (A):
$$\begin{cases} x = \text{Log}(\sin \varphi) + \cos^2 \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \\ y = \sin \varphi \cos \varphi + 2 \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \end{cases}$$

Question subsidiaire: ρ' stationnaire ($\Rightarrow \frac{ds}{d\varphi} = 0$).

$\Leftrightarrow \lambda = 2\sin \varphi - \frac{1}{\sin \varphi}$: il faut alors étudier: $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$ $\Rightarrow f$ $\nearrow$ $\frac{1}{1}$ cqd.

II

1°. Equation homogène: résolvante: $x^2 - 2x \sin d + 1 = 0$: $x = \sin d \pm i \cos d$.

Résultats:

	$d \in \pi/2 + k\pi$	$d \in \pi/4 + k\pi$	$d \in k\pi$
sol. particulière	$-\frac{\cos d}{\sin d} \sin x$		$x \in \sin x$ ($\varepsilon = \cos d$)
sol. de l'équa. homogène	$e^{\pm i(\lambda x + \mu)}$ ($\varepsilon = \sin d$)	$e^{i \sin d} [\lambda \cos(\mu \cos d) + \mu \sin(\mu \cos d)]$	

$\rightarrow$ Très simple avec la méthode du cours.

$\rightarrow$ immédiat.

2°. $d = \pi/2$ on trouve: $f(x) = e^x$!

3°. Longueur de (C): $L = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2u}} du$: $t = \sqrt{1 + e^{2u}} \Rightarrow L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2 dt}{t^4 - 1}$

d'où: $L = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \text{Log} \frac{(\sqrt{1+e^2} - 1)(1+\sqrt{2})}{(\sqrt{1+e^2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \approx 2$

III

1°. On trouve

$$\begin{cases} P_1 = x^2 - 1 \\ P_2 = x \end{cases} \text{ d'où: } P = \lambda(x^2 - 1) + \mu x.$$