

Problème I:

1° On pose $\vec{g}' = -\sin\theta \cdot \vec{N} + \cos\theta \cdot \vec{B}$ et alors:

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \vec{T} \left(1 - a(s) \cdot \frac{\omega\theta}{R} \right) + \vec{g} \left(\frac{da}{ds} \right) + \vec{g}' \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{T} \right) a(s).$$

La base $(\vec{T}, \vec{g}, \vec{g}')$ est orthonormée: pour que $\frac{d\vec{P}}{ds}$ soit proportionnel à $\vec{g}$, il faut et il suffit que:
$$\begin{cases} 1 - a(s) \frac{\omega\theta}{R} = 0 \\ \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{T} \quad (\text{car } a(s) \neq 0). \end{cases}$$

Donc, une CVS pour que $a(s)$ existe est que: $\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{T}$ et dans ce cas, on trouve: $a(s) = \frac{R}{\omega\theta}$.

2° En appliquant les formules: $R = \frac{\left(\frac{ds}{dr}\right)^3}{\left\| \frac{d\vec{M}}{dr} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{dr^2} \right\|}$ et $T = \frac{\left(\frac{d\vec{M}}{dr} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{dr^2}\right)^2}{\left(\frac{d\vec{M}}{dr} \wedge \frac{d^2\vec{M}}{dr^2}\right) \cdot \frac{d^3\vec{M}}{dr^3}}$

on trouve: $s = \sqrt{R^2 + R^2} t$.

$$R = \frac{R^2 + R^2}{R}; \quad T = \frac{R^2 + R^2}{R^2 + R^2}.$$

$$\text{d'où: } \theta(r) = \frac{-R + R}{\sqrt{R^2 + R^2}}.$$

3° On a $\frac{d\vec{V}}{dr} = \frac{d\vec{V}}{ds} \cdot \frac{ds}{dr}$ or, le calcul de $\frac{d\vec{V}}{ds}$ est en tout point semblable à celui de: $\frac{d\vec{P}}{ds}$, donc:

$$\frac{d\vec{V}}{dr} = \vec{T} \left(1 - b(r) \cdot \frac{\omega\theta}{R} \right) \frac{ds}{dr} + \vec{g} \cdot \frac{db}{dr} + \vec{g}' b(r) \frac{ds}{dr} \left(\frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{T} \right)$$

Pour que la tangente en V forme un angle constant α (ou hypothèse) avec $\vec{g}$, il faut et il suffit que: $\frac{d\vec{V}}{dr} \cdot \vec{g} = \cos\alpha \cdot \left\| \frac{d\vec{V}}{dr} \right\|$.

D'où, en élevant au carré:

$$\left(\frac{db}{dr} \right)^2 = \cos^2\alpha \cdot \left(\frac{db}{dr} \right)^2 + \left(1 - \frac{b(r)\omega\theta}{R} \right)^2 \left(\frac{ds}{dr} \right)^2 \cos^2\alpha. \quad \text{d'où les équations}$$

différentielles: $\sin\alpha \cdot \frac{db}{dr} + \varepsilon \cdot b(r) \omega \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}} \cdot \cos\alpha \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \varepsilon \cdot \cos\alpha$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Problème II:

1° On a: $\frac{d}{ds} (\vec{T} \cdot \vec{T}_1) = \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}_1}{ds} + \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T}_1$: or: $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N}$ et $\frac{d\vec{T}_1}{ds} = \frac{1}{R_1} \vec{N}_1$
donc: $\frac{d}{ds} (\vec{T} \cdot \vec{T}_1) = 0 \Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{T}_1 = \cos\alpha$ (constant).

$$\frac{d\vec{T}_1}{ds} = \vec{T} + \frac{du}{ds} \vec{N} + u \left(-\frac{1}{R} \vec{T} + \frac{1}{T} \vec{B} \right) \text{ or: } \frac{d\vec{T}_1}{ds} \perp \vec{N}_1 = \vec{N} \text{ donc: } \frac{du}{ds} = 0.$$

Par conséquent, u est constant.

On a: $\vec{T}_1 = \cos\alpha \cdot \vec{T} + \sin\alpha \cdot \vec{B}$ car $\vec{T}_1 \perp \vec{N}$ avec α constant.

$$\text{et: } \frac{d\vec{T}_1}{ds_1} = \frac{d\vec{T}_1}{ds} \cdot \frac{ds}{ds_1} = \frac{ds}{ds_1} \left[\left(1 - \frac{u}{R} \right) \vec{T} + \frac{u}{T} \vec{B} \right] \text{ donc: } \frac{1 - \frac{u}{R}}{\frac{u}{T}} = \omega \text{gd}$$

et par conséquent: $\frac{u}{R} + \frac{u \omega \text{gd}}{T} = 1$ (c.q.f.d.).

Le couple (a, b) est unique à condition que $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{T}$ ne soient pas constants.

On remarque d'autre part que: $\frac{ds_2}{ds} = \frac{u}{T \sin\alpha}$.