

Comme $(\vec{T}_1, \vec{N}, \vec{B}_1)$ est orthonormé direct, on a: $\vec{B}_1 = -\sin \alpha \vec{T} + \cos \alpha \vec{B}$.

$$\text{d'où: } \frac{d\vec{B}_1}{ds_1} = \frac{ds}{ds_1} \frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{T \sin \alpha}{u} \left(-\frac{\sin \alpha}{R} - \frac{\cos \alpha}{T} \right) \cdot \vec{N} = -\frac{\sin^2 \alpha}{u^2} T \cdot \vec{N} = -\frac{1}{T_1} \vec{N}$$

Par conséquent: $T T_1 = \frac{u^2}{\sin^2 \alpha}$ constant. $\alpha = \frac{\sin \alpha}{u}$

$$2^\circ \text{ Réciproque: } \frac{d\vec{T}_1}{ds_1} = \vec{T} \left(1 - \frac{a}{R} \right) + \frac{a}{T} \vec{B} = \frac{1}{T} (b \vec{T} + a \vec{B})$$

$$\text{d'où: } \vec{T}_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \vec{T} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \vec{B} \Rightarrow \frac{d\vec{T}_1}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(\frac{b}{R} - \frac{a}{T} \right) \cdot \vec{N}$$

soit on a donc: $\vec{N}_1 = \vec{N}$ (si $\frac{b}{R} - \frac{a}{T} > 0$), si non: $\vec{N}_1 = -\vec{N}$.

$$3^\circ \text{ On a: } \frac{d\vec{P}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R^2+T^2}} (\vec{N} - \vec{N}) = \vec{0} \quad (\|\vec{P}\| = 1).$$

Comme $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N}$, que $\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+T^2}}$ alors, la composante de $\vec{N}$ sur $\vec{P}$ est nulle. D'autre part, il n'y a que 2 vecteurs dans le plan $(\vec{T}, \vec{B})$ $\perp$ à $\vec{T}$ et normés; on peut prendre $\vec{N} = -\sin \alpha \vec{T} + \cos \alpha \vec{B}$.

En utilisant la relation $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N}$, on trouve alors: $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R \sin \alpha}$.

Puis:
$$\begin{aligned} dx &= \sin \alpha \cos \alpha \cdot ds \\ dy &= \sin \alpha \sin \alpha \cdot ds \\ dz &= \cos \alpha \cdot ds \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = R \sin^2 \alpha \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{R \sin \alpha} \right) \\ y = -R \sin^2 \alpha \cos \left(\frac{\alpha}{R \sin \alpha} \right) \\ z = \alpha \cdot \cos \alpha \end{cases} \text{ avec constantes d'intégration près.}$$

On reconnaît bien ici une hélice circulaire.

On a: (R, T) constants $\Rightarrow \gamma$ hélice circulaire, donc, si γ n'est pas une hélice, R et T ne sont pas simultanément constants et par conséquent le couple (a, b) de la relation (1) est unique; f est bien définie.

Puis, si γ n'est pas une hélice circulaire, γ_1 ne l'est pas non plus (En effet: T n'est pas constant et par conséquent T_1 non plus).

Donc, $f(\alpha_1)$ est bien définie et n'est autre que γ_1 !

Exercice: Pour une courbe C_0 donnée, on a 2 p^{ts} d'intersection: On:

$\theta = 0, \theta = \pi$ (en supposant $R \neq 0$ et $T \neq 0$).

D'autre part, on aura toutes les courbes C_R en faisant varier R dans $[\theta, \theta + \pi]$.

Ensuite, le centre de courbure correspondant à $\theta = \pi$, C est $\mathcal{C}$ symétrique par rapport à O du centre de courbure pour $\theta = 0$, $R + \pi$; donc, on ne s'intéresse qu'au cas où $\theta = 0$ et on étudie C_R sur l'intervalle $[R - \pi, R + \pi]$.

On trouve alors: $R = \frac{4}{3} a \cos \frac{R}{2}$.

$$\text{Et: } \vec{OT} = a(1 + \cos R) \vec{x} + \frac{4}{3} a \cos \frac{R}{2} (-\cos \frac{R}{2} \vec{x} + \sin \frac{R}{2} \vec{y}) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{3} (1 + \cos R) \\ y = \frac{2a}{3} \sin \frac{R}{2} \end{cases}$$

$$\text{Equation paramétrique de l'ellipse: } \left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{a^2}{9} \quad + \text{sym} / O.$$