

Exercice I : Soit $A = \begin{pmatrix} t-2 & 2 \\ t-3 & 3 \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients dans R .

1°) Montrer que pour $n \geq 1$ on a : $A^n = \begin{pmatrix} t^{n-1} P_{n-1}(t) & P_{n-1}(t) \\ t^{n-1} Q_{n-1}(t) & Q_{n-1}(t) \end{pmatrix}$
 où P_n et Q_n sont des polynômes à coefficients dans R tels que : $\deg P_n = n$
 et $Q_n = 1 + P_n$.

2°) Donner la relation de récurrence entre P_n et P_{n-1} ; en déduire l'expression de A^n .

Exercice II : On pose $D_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 \\ b & c & a \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$ où D_n est un déterminant d'ordre n à coefficients dans C .

1°) Trouver une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1}, D_{n-2} : $D_n = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}$

2°) En déduire que D_n peut se mettre sous la forme : $D_n = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}$
 si $a^2 \neq 4bc$ et $D_n = (n+1)(a/2)^n$ dans le cas contraire.

(r_1 et r_2 sont des complexes et on précisera la façon de les calculer).

3°) Application : donner une expression simple de D_n dans les cas suivants :

$a = 5, b = 4, c = 1$; $a = 2 \cos \frac{2\pi}{p}, b = c = 1$.

Exercice III :

On définit le mouvement d'un solide par rapport à un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en se donnant $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé où :

$\vec{i}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, $\vec{j}(t) = \cos a(t) \vec{j}_1(t) + \sin a(t) \vec{k}$ où $\vec{j}_1(t) = \vec{k} \wedge \vec{i}(t)$.

et $\vec{OA}(t) = b \vec{j}_1(t) + f(t) \vec{k}$.

b est un réel et les fonctions a et f sont de classe C^1 de R^+ dans R qui vérifient : $a(0) = \pi/2$ et $f(0) = 0$.

1°) Exprimer le vecteur $\vec{K}(t)$ en fonction de $\vec{j}_1$ et de $\vec{k}$; déterminer le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Montrer que l'on peut choisir a pour que $\vec{\Omega}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ soient orthogonaux.

Exprimer alors les fonctions $\cos a(t)$ et $\sin a(t)$ à l'aide des fonctions tht et cht . On gardera ces valeurs par la suite.

2°) On désigne par C la trajectoire de A dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer f pour que l'axe instantané de rotation soit tangent à C en A . Montrer alors que cet axe reste dans un plan fixe P lié à $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Problème :

Pour tout réel $t \geq -1$, on pose : $F(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + t \cos^2 u} \, du$.

I- 1°) Calculer $F(-1)$ et $F(0)$.

2°) Montrer que si $0 \leq t_1 \leq t_2$, on a : $0 \leq F(t_2) - F(t_1) \leq \frac{t_2 - t_1}{4}$.

3°) Montrer que si $u \in [0, \pi/2]$ on a : $\left\{ \begin{array}{l} \text{et si } t \in]-1, 0[\end{array} \right\}$ on a : $\frac{(t+1) \cos^2 u}{\sqrt{1+t \cos^2 u} + \sin u} \leq \sqrt{t+1} \cdot \cos^2 u$

En déduire : $0 \leq F(t) - F(-1) \leq \frac{1}{2} \sqrt{t+1}$.

4°) Montrer que la fonction $F(t)$ est continue pour $t \geq -1$.