

5°) Montrer que pour tout $t > -1$, on a $F(t) = \sqrt{1+t} F\left(\frac{-t}{1+t}\right)$.

En déduire un équivalent simple de $F(t)$ quand t tend vers l'infini.

II- 2°) Exprimer à l'aide de F la longueur L du quart de l'ellipse qui a pour équations paramétriques dans un repère orthonormé : $x = a \cos u, y = b \sin u$ où $u \in [0, \pi/2]$ et où $0 < b \leq a$.

2°) Montrer l'inégalité : $L \leq a + \frac{\pi}{4}b$.

3°) Parmi les ellipses données, caractériser celles qui ont le plus petit périmètre.

4°) Montrer l'inégalité : $L > \frac{\pi}{2} \sqrt{ab}$,

et en déduire une inégalité remarquable pour $F(t)$ quand $-1 < t \leq 0$.

III- 1°) Ecrire le développement limité de $\sqrt{1 + t \cos^2 u}$ à l'ordre n pour t voisin de 0. En intégrant terme à terme, donner celui de $F(t)$ à l'ordre n .

2°) En utilisant les 4 premiers termes du D.L. de F , donner une valeur approchée (avec 4 chiffres significatifs) de la longueur L correspondant à $a = 2$ et $b = \sqrt{3}$.