

Corrigé du devoir

Exercice I : 1°/ en écrivant $A^{n+1} = A^n \cdot A$, on trouve par récurrence que A^n s'écrit comme l'énoncé le suggère et d'autre part, on a :

$$P_n(t) = P_{n-1}(t) + 2t^n \quad P_0 = 2 \quad \text{comme } \deg P_{n-1} = n-1, \text{ on en déduit que}$$

$$Q_n(t) = Q_{n-1}(t) + 2t^n \quad Q_0 = 3 \quad \deg P_n = n; \text{ de même pour } Q_n.$$

Pour montrer que $Q_n = 1 + P_n$, on écrit $A^{n+1} = A \cdot A^n$ et on trouve les relations : $P_n = 2Q_{n-1} + (t-2) \cdot P_{n-1}$
 m.a.d. il. $\rightarrow Q_n = 3Q_{n-1} + (t-3)P_{n-1} \Rightarrow Q_n - P_n = Q_{n-1} - P_{n-1} = \dots = 1.$

2°/. Grâce à la relation de récurrence $P_n = P_{n-1} + 2t^n$, on en déduit :
 $P_n = 2(1 + t + \dots + t^n)$ et $Q_n = 1 + P_n$.

Exercice II

1°/. En développant par rapport à la 1^{ère} ligne, on trouve :

$$D_n - aD_{n-1} + bcD_{n-2} = 0.$$

2°/. La résolvante s'écrit : $x^2 - ax + bc = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 4bc$.

1^{er} cas : si $a^2 \neq 4bc$, on a 2 racines distinctes r_1 et r_2 .

On sait que : D_n s'écrit : $D_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ et on a :

$$D_0 = 1, D_1 = a \Rightarrow \alpha = \frac{r_2 - a}{r_2 - r_1} \text{ et } \beta = \frac{r_1 - a}{r_1 - r_2} \text{ d'où}$$

$$D_n = \frac{r_2^n r_1 - a r_2^n + a r_1^n - r_1^n r_2}{r_1 - r_2} = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}.$$

$$\text{Car : } r_1 r_2 = bc \\ \text{et : } r_1^{n+1} = a r_1^n - b c r_1^{n-1}$$

2^{ème} cas : si $a^2 = 4bc$, on a 1 racine double égale à $\frac{a}{2}$ et $D_n = \alpha \left(\frac{a}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{a}{2}\right)^n$
 et on trouve : $\alpha = \beta = 1$.

3°/. $a=5, b=4, c=1 \Rightarrow D_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$

$$a = 2e^{i\frac{2\pi}{p}}, b=c=1 \Rightarrow r_1 = e^{i\frac{2\pi}{p}}, r_2 = e^{-i\frac{2\pi}{p}} \Rightarrow D_n = \frac{\sin \frac{2(n+1)\pi}{p}}{\sin \frac{2\pi}{p}}.$$

Exercice III

1°/. La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale de sens direct; donc, le vecteur $\vec{K}$ est dans le plan $(\vec{j}, \vec{k})$ d'où : $\vec{K} = -\sin a(t) \cdot \vec{j} + \cos a(t) \cdot \vec{k}$.

le mouvement du solide est la composée de 2 mouvements :

1°/. le mot de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) / (\vec{i}, \vec{j}, \vec{e})$: rotation autour de $\vec{e}$: $\vec{\Omega}_1 = \vec{e}$.

2°/ et le mot de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) / (\vec{i}, \vec{j}, \vec{e})$: rotation autour de $\vec{i}$ de vitesse angulaire $a'(t)$. $\Rightarrow \vec{\Omega}_2 = a'(t) \cdot \vec{i}$.

donc, $\vec{\Omega} = a'(t) \cdot \vec{i} + \vec{e}$.

$$\vec{\Omega} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = a'(t) + \sin a(t) = 0 \Rightarrow \frac{da}{dt} = -\sin a \Rightarrow r_g \frac{a}{2} = e^{-t} \text{ et } a = \frac{\pi}{2} \text{ car pour } t=0, a = \frac{\pi}{2}.$$

$$\cos a(t) = \frac{1 - r_g \frac{a}{2}}{1 + r_g \frac{a}{2}} = \tanh t \text{ et } \sin a(t) = \frac{2 r_g \frac{a}{2}}{1 + r_g \frac{a}{2}} = \frac{1}{\cosh t}.$$

2°/. $\frac{d\vec{A}}{dt} = b \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + f'(t) \cdot \vec{e} = -b \vec{i} + f'(t) \cdot \vec{e}$; or : $\frac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{\Omega} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\vec{i} \wedge \vec{e} = f'(t) = -\frac{b}{a'(t)} = b \cosh t \text{ car } a'(t) = -\sin a(t) = -\frac{1}{\cosh t}.$$