

d'où: $f(r) = b \ln r$ (car $f(0) = 0$).

Montrons que Δ reste dans un plan fixe:

En effet, Δ passe par un point fixe A et reste ~~perpendiculaire~~ perpendiculaire au vecteur $\vec{I} + \vec{J}$ (cf 1°); donc, dans le repère $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, Δ reste dans le plan: $X + Y = 0$.

Problème:

I. 1° $F(-1) = \frac{2}{\pi}$; $F(0) = 1$.

2° $F(r_2) - F(r_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sqrt{1-t\omega^2 u} - \sqrt{1-t\omega^2 u}) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(r_2 - r_1) \omega^2 u}{\sqrt{1-t\omega^2 u} + \sqrt{1-t\omega^2 u}} du$.

or: $\sqrt{1-t\omega^2 u} \geq 1 \Rightarrow F(r_2) - F(r_1) \leq \frac{r_2 - r_1}{4}$. ($F(r_2) - F(r_1) \geq 0$ évident).

3° $\omega^2 u < 1 \Rightarrow t\omega^2 u > t$ ($t < 0$) $\Rightarrow \sqrt{1-t\omega^2 u} > \sqrt{1+t}$ et $\sin u > 0$ ($u \in [0, \frac{\pi}{2}]$).

donc: $A(u) = \frac{(t+1)\omega^2 u}{\sqrt{1-t\omega^2 u} + \sin u} \leq \sqrt{t+1} \omega^2 u$.

or: $F(r) - F(-1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} A(u) du \leq \frac{\sqrt{t+1}}{2}$.

4° 2° $\Rightarrow$ continuité sur $\mathbb{R}^+$.

3° $\Rightarrow$ continuité à droite en -1 .

et si $t \in]-1, 0]$, $\frac{-t}{1+t} \in [0, +\infty[\Rightarrow$ 5° $\Rightarrow$ continuité sur $]-1, 0]$.

5° $F(\frac{-t}{1+t}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{t\omega^2 u}{1+t}} du = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + t \sin^2 u} du = \frac{1}{\sqrt{1+t}} F(r)$

et, quand $t \rightarrow +\infty$, $\frac{-t}{1+t} \rightarrow -1$ et comme F est continue à droite en -1 ,

on a: $F(r) \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{1+t}$.

II. 1° $L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \omega^2 u} du = \frac{\pi}{2} a \cdot f\left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)$.

2° si $t \in [-1, 0]$, $F(r) \leq F(-1) + \frac{1}{2} \sqrt{r+1}$
 $\Rightarrow L \leq \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} \right] = a + \frac{\pi}{4} b$.

3° On a: $\pi \cdot ab = S$ constant et on veut L minimum: ($b \leq a$)

4° $\Rightarrow L = a \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 u + \frac{S^2}{a^4}}$

On obtient L minimum pour $a = b$ (arc 6°).

4° $L \geq$ longueur du $\frac{1}{4}$ de arc de rayon $\sqrt{ab}$ (cf 3°) donc, $L \geq \frac{\pi}{2} \sqrt{ab}$.

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} a F\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \geq \frac{\pi}{2} \sqrt{ab}$ et en posant: $t = \frac{b^2}{a^2} - 1 \Rightarrow F(r) \geq (1+t)^{1/4}$.

III. Après calculs, on trouve: $F(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} A_k \frac{t^k}{2k-1} + o(t^n)$

où $A_k = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k} \right)^2 = \left(\frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \right)^2$.

Calcul de la longueur: $L = \pi \cdot F(-\frac{1}{4})$; on a: $F(-\frac{1}{4}) = 0,9316$.

d'où: $L \approx 2,927$.