

EXERCICE I :

Mercredi 4/11/80

Étude de la suite de complexes (z_n) définie par : $z_0 = 0$ et la relation de récurrence : $z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n + 1$.

1°) Exprimer z_n comme une somme de termes en progression géométrique. En déduire z_n .

2°) En s'inspirant du cours, trouver d'une autre manière l'expression de z_n quelle est sa limite ?

EXERCICE II : limite sup, limite inf.

Soit (u_n) une suite de réels bornée (i.e. majorée et minorée.) On définit

$$\limsup(u_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} u_k \right) \quad \text{et} \quad \liminf(u_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} u_k \right)$$

1°) Montrer que ces nombres sont bien définis et que l'on a l'inégalité :

$$\liminf(u_n) \leq \limsup(u_n). \quad (\text{On montrera que } \forall (n, n') \in \mathbb{N}^2, \sup_{k \geq n'} u_k \geq \inf_{k \geq n} u_k)$$

2°) On veut montrer l'équivalence suivante :

$$\lim u_n \text{ existe} \Leftrightarrow \limsup(u_n) = \liminf(u_n).$$

a. $\Rightarrow$: montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{k \geq n} u_k \leq \inf_{k \geq n} u_k + \varepsilon$; montrer ensuite l'égalité demandée.

(Il est recommandé de bien justifier ses affirmations.)

b. $\Leftarrow$: on pose $l = \limsup(u_n) = \liminf(u_n)$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : l \leq \sup_{k \geq n} u_k < l + \varepsilon \quad ; \quad \text{faire de même}$$

avec les inf, puis conclure.

3°) Application : soit (a_n) une suite de réels positifs vérifiant :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 \leq a_{r+s} \leq a_r + a_s.$$

Par récurrence, on a $a_{nr+s} \leq na_r + a_s$. r étant un naturel fixé et p écrivait n , montrer que l'on a : $\frac{1}{p} a_p \leq \frac{n}{p} a_r + \frac{1}{p} a_s$ où $0 \leq s < r$;

Puis, en utilisant la propriété suivante (que l'on ne demande pas de démontrer) : si $u_n \leq v_n$ et si (v_n) a une limite a , alors $\limsup(u_n) \leq a$;

montrer que $\limsup(\frac{1}{p} a_p) \leq \frac{1}{r} a_r$ puis, en déduire que la suite $\frac{1}{n} a_n$ admet une limite.

PROBLEME : Complexifié d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Il est recommandé de bien lire l'énoncé et de rédiger proprement les démonstrations en précisant clairement si les espaces vectoriels considérés sont sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

Soit E un e.v. de dim finie sur $\mathbb{R}$; on définit sur E^2 les deux lois + et .

$$\text{par : } \forall (x, y, x', y') \in E^4 : (x, y) + (x', y') = (x+x', y+y') \quad \text{et}$$

$$\forall (a, b), \forall (x, y) \in E^2 : (a, b) \cdot (x, y) = (ax-by, bx+ay)$$

On montre alors que l'on peut définir sur E^2 une structure d'e.v. sur $\mathbb{C}$; on notera : $z = (x, y) = x + iy$ et on a : $(a+ib) \cdot (x+iy) = ax-by + i(bx+ay)$.