

1°) L'anneau de cette structure sera noté $c(E)$. (Complexifié de E)

2°) Si $\dim_{\mathbb{R}} E = n$, alors, calculer : $\dim_{\mathbb{C}} c(E)$ et $\dim_{\mathbb{R}} c(E)$. (On précisera clairement les bases obtenues).

A quoi est égal $c(\mathbb{R}^2)$?

3°) Soit $z \in c(E)$; $z = x + iy$: on note $x = R(z)$ et $y = I(z)$. Les applications R et I : sont-elles des endomorphismes de $c(E)$?

sont-elles des applications linéaires de $c(E)$ dans E ?

On définit aussi : $z \mapsto \bar{z} = x - iy$; est-ce une application linéaire ?

Si oui, de quoi dans quoi ?

3°) a. Soit Σ un s.e.v. de $c(E)$; montrer que $R(\Sigma)$ et $I(\Sigma)$ considérés comme sous-ensembles de E , sont des s.e.v. de E (sur $\mathbb{R}$). Montrer que $R(\Sigma) = I(\Sigma)$: s.e.v. noté $l(\Sigma)$.

b. Exemple : préciser $l(\Sigma)$ quand Σ est le s.e.v. de $\mathbb{C}^2$ engendré par $(1, i)$.

c. Soit $H \subset E$ un s.e.v. de E ; préciser $l(c(H))$.

4°) a. Avec les mêmes notations qu'au 3°, montrer que $\Sigma \cap E$ est un s.e.v. (sur $\mathbb{R}$!) de E et que l'on a : $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = c(\Sigma \cap E)$ où $\bar{\Sigma} = \{\bar{z} \mid z \in \Sigma\}$.

Préciser chacun de ces s.e.v. pour Σ défini au 3°)b.

b. Etablir la relation $\Sigma + \bar{\Sigma} = c(l(\Sigma))$.

Que penser de $\Sigma + \bar{\Sigma}$ avec l'exemple du 3°)b ?

5°) On pose $z_1 = (1, 0, e^{ia}, e^{ib})$ et $z_2 = (0, 1, e^{ib}, e^{ia})$ dans $\mathbb{C}^4$. Puis, $\Sigma = \text{Vect}(z_1, z_2)$; calculer $\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma)$ et chercher $l(\Sigma)$.

Idee du barème :

Exercice I : 2,5 1°) 1 2°) 1,5

Exercice II : 6,5 1°) 2 2°) 3 3°) 1,5

Problème : 11 1°) 4 2°) 2 3°) 3,5 4°) 2,5 5°) 2