

Exercice I :

1°) On trouve : $z_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$

2°) (est une suite arithmétique géométrique : on résoud : $\ell = \frac{1}{2} \ell + 1 \Rightarrow \ell = \frac{4+2i}{5}$

et : $z_n - \ell = \left(\frac{1}{2}\right)^n (z_0 - \ell) \Rightarrow z_n = \frac{4+2i}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{4+2i}{5}\right)$

$\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \frac{4+2i}{5}$

Exercice II :

1°) Comme $\{u_k\}_{k \geq n}$ est majorée et minorée, les suites $v_n = \sup_{k \geq n} \{u_k\}$

et $w_n = \inf_{k \geq n} \{u_k\}$ sont bien définies et $w_n \leq v_n$. De plus, (v_n) est

minorée donc convergente (sa limite est égale à : $\inf_{n \in \mathbb{N}} (v_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)$).

pour (w_n) c'est le contraire : (w_n) est majorée et sa limite est égale à

$\sup_{n \in \mathbb{N}} w_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (u_n)$.

$\sup_{k \geq n} \{u_k\} \geq \inf_{k \geq n} \{u_k\} \Rightarrow v_n \geq w_n$ or : $v_n \geq v_{n+1} \geq w_{n+1} \geq w_n$.

Donc, v_n est un majorant de $\{w_n\} \Rightarrow v_n \geq \sup(w_n)$

$\sup(w_n)$ est un minorant de $\{v_n\} \Rightarrow \inf(v_n) \geq \sup(w_n)$

$\Rightarrow \limsup u_n \geq \liminf u_n$.

2°) a). Traduisons l'hypothèse : (u_n) a une limite.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n : \forall k \geq n : |u_k - \ell| < \varepsilon$ donc : $\ell - \varepsilon < u_k < \ell + \varepsilon$

donc, $\ell + \varepsilon$ est un majorant de $\{u_k\}_{k \geq n} \Rightarrow v_n \leq \ell + \varepsilon$
et $\ell - \varepsilon$ est un minorant de $\{u_k\}_{k \geq n} \Rightarrow w_n \geq \ell - \varepsilon$

c'est à dire : $\sup_{k \geq n} \{u_k\} \leq \inf_{k \geq n} \{u_k\} + \varepsilon$.

donc : $\inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} \{u_k\}) \leq \inf_{k \geq n} \{u_k\} + \varepsilon \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} \{u_k\}) + \varepsilon$

On a montré : $\forall \varepsilon > 0 : \limsup(u_n) \leq \liminf(u_n) + \varepsilon \Rightarrow \limsup(u_n) = \liminf(u_n)$

On a bien l'égalité entre ces 2 quantités grâce au 1°.

b). $\ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} (v_n)$, donc, en utilisant la caractérisation de la borne inférieure,

on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists v_n : \ell \leq v_n < \ell + \varepsilon$. donc, si l'on prend $N = \sup(n, n')$

de même $\forall \varepsilon > 0, \exists w_p : \ell - \varepsilon < w_p \leq \ell$. alors : $\ell - \varepsilon < w_N \leq v_N < \ell + \varepsilon$

or $\forall k \geq N : \inf_{k \geq N} \{u_k\} \leq u_k \leq \sup_{k \geq N} \{u_k\} \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_k < \ell + \varepsilon$ et par conséquent

on a montré : $\forall \varepsilon > 0, \exists N. \forall k \geq N : |u_k - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$

3°) Application : on divise p par $n : p = n \cdot r + a$ avec $0 \leq a < n$

d'où : $\frac{1}{p} a_p \leq \frac{n}{p} a_n + \frac{1}{p} a_0$; quand $p \rightarrow +\infty$ $\frac{n}{p} = \frac{1}{r} - \frac{a}{pn} \Rightarrow \frac{1}{r}$ et $\frac{1}{p} a_0 \rightarrow 0$

car $\{a_0, a \in \mathbb{N}\}$ est borné.