

Donc, on en déduit: $\limsup(\frac{1}{p} a_p) \leq \frac{1}{2} a_n$. $\therefore \limsup(\frac{1}{p} a_p)$ est un minimum de $\{\frac{1}{2} a_n\}_{n \geq 0}$ donc: $\limsup(\frac{1}{p} a_p) \leq \liminf(\frac{1}{p} a_p)$ et par conséquent, la suite $\frac{1}{p} a_p$ admet une limite.

Problèmes:

1°. $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de E alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et aussi une base de $c(E)$ (c.v. sur $\mathbb{C}$) et une base de $c(E)$ sur $\mathbb{R}$ sera: $(e_1, \dots, e_n, i e_1, \dots, i e_n)$.

Donc: $\dim_{\mathbb{C}} c(E) = n$ et $\dim_{\mathbb{R}} c(E) = 2n$. ; $c(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}^2$.

2°. R n'est pas un endomorphisme de $c(E)$: si $x \neq 0$: $R[(1+i)(x+iy)] = R(x) = 0$
(sur $\mathbb{C}$) $x \in E$ au lieu de: $(1+i)x$.

de même I n'est pas un endomorphisme de $c(E)$: $I[(1+i)(x+iy)] = 0$.

Par contre, ce sont des applications linéaires de $c(E)$ dans E lorsqu'on considère ces 2 ensembles comme c.v. sur $\mathbb{R}$.

De même pour: $z \mapsto \bar{z}$: c'est une a.l. de $c(E)$ dans lui-même ($c(E)$ c.v. sur $\mathbb{R}$).

3°. a). $R(\Sigma) \neq \emptyset$ et $\forall (x, y) \in R(\Sigma)^2$: $\exists (y, y')$: $x+iy \in \Sigma$
 $x'+iy' \in \Sigma \Rightarrow \exists (1, p) \in \mathbb{R}^2$:
 $\lambda(x+iy) + p(x'+iy') \in \Sigma$

donc: $\lambda x + p x' \in R(\Sigma)$: $R(\Sigma)$ s.c.v. (sur $\mathbb{R}$) de E .

de même pour $I(\Sigma)$.

Si $x \in R(\Sigma)$, $x+iy \in \Sigma \Rightarrow i(x+iy) \in \Sigma \Rightarrow x \in I(\Sigma)$: $R(\Sigma) \subset I(\Sigma)$
et on démontre de même que $I(\Sigma) \subset R(\Sigma)$ d'où l'égalité.

b). $\Sigma = \{(a+ib)(1, i), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{(a+ib, -b+ia) (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \Rightarrow I(\Sigma) = \{(b, a), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
donc: $\ell(\Sigma) = \mathbb{R}^2$.

c). $c(H) = \{x+iy, (x, y) \in H^2\}$ or $\ell(c(H)) = R(c(H)) = \{x \in H\} = H$ (!).

4°. a). $\Sigma \cap E = \{x \in \Sigma, x \in E\}$. s.c.v. de E sur $\mathbb{R}$: évident.

$c(\Sigma \cap E) = \{x+iy, x \in \Sigma \cap E, y \in \Sigma \cap E\}$ donc: si $x+iy \in c(\Sigma \cap E)$: $x-iy \in c(\Sigma \cap E)$
comme $x \in \Sigma$ et $y \in \Sigma \Rightarrow x+iy \in \Sigma$ et $x-iy \in \Sigma \Rightarrow x+iy \in \Sigma \cap \bar{\Sigma}$.

Dans l'autre sens: $z \in \Sigma \cap \bar{\Sigma} \Leftrightarrow z \in \Sigma$ et $\bar{z} \in \Sigma \Leftrightarrow (x-iy = z)$: $x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \in \Sigma$

Donc, $x \in \Sigma \cap E$ et $y \in \Sigma \cap E \Rightarrow z \in c(\Sigma \cap E)$ d'où $c(\Sigma \cap E) = \Sigma \cap \bar{\Sigma}$ et $y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \in \Sigma$.

Si $\Sigma = \{(a+ib)(1, i)\}$: $\Sigma \cap E = \{0\}$ donc, $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = \{0\}$.

b). $\Sigma + \bar{\Sigma} = \{z+\bar{z}', (z, z') \in \Sigma^2\} = \{x+x'+i(y-y')\} \subset c(\ell(\Sigma))$.

Inclusion dans l'autre sens.

$z \in c(\ell(\Sigma)) \Leftrightarrow z = x+iy, x \in \ell(\Sigma), y \in \ell(\Sigma)$. $\Rightarrow x+iy' \in \Sigma$ et $x'-iy \in \Sigma$.

donc: $z_1 = \frac{1}{2}(x+x') + \frac{i}{2}(y+y') \in \Sigma$ et $\bar{z}_2 = \frac{1}{2}(x-x') - \frac{i}{2}(y-y') \in \bar{\Sigma}$ or: $z = z_1 + \bar{z}_2 \in \Sigma + \bar{\Sigma}$.

$\Rightarrow \Sigma + \bar{\Sigma} = c(\ell(\Sigma))$.

Et, à l'exemple du 3° b). la somme $\Sigma + \bar{\Sigma}$ est directe.

5°. $\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma) = 2$ $\Sigma = \{(a+ib)(1, 0, e^{ia}, e^{ib}) + (c+id)(0, 1, e^{ic}, e^{id})\} = \{(a+ib, c+id, (a+ib)e^{ia} + (c+id)e^{ic}, (a+ib)e^{ib} + (c+id)e^{id})\}$.

$\ell(\Sigma) = \{(a, b, c, d, (a \cos \alpha - b \sin \alpha + c \cos \beta - d \sin \beta), (a \sin \alpha + b \cos \alpha + c \sin \beta + d \cos \beta))\}$.

engendré par les vecteurs: $e_1 = (1, 0, \cos \alpha, \sin \alpha)$, $e_2 = (0, 1, \cos \beta, \sin \beta)$, $e_3 = (0, 0, \sin \alpha, \cos \alpha)$, $e_4 = (0, 0, \sin \beta, \cos \beta)$.

$e_5 = (0, 0, \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta)$. $\dim \ell(\Sigma) = \text{ng}(e_1, e_2, e_3, e_4) = 2 + \text{ng}((\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta), (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta))$.