

Exercice I :

1°) Déterminer n pour que $X^2 + X + 1$ divise $(X+1)^m - X^m - 1$ (sur $\mathbb{C}$)

2°) Pour quelles valeurs de a , le polynôme $p = X^3 - 3X^2 + a + 2$ admet-il une racine double ? Donner alors toutes ses racines.

N.B. : 1° et 2° : aucun rapport !

Exercice II :

Dans $\mathbb{C}[X]$, on définit une suite de polynômes par la relation de récurrence :

$$P_{n+2} = (1-X^2)P_{n+1} - X^2P_n \quad \text{et} \quad P_0 = 1, \quad P_1 = X^2 + 1.$$

1°) Trouver l'expression de P_n .

2°) Donner, sous forme trigonométrique, toutes les racines de P_n .

Problème : Polynômes de Bernstein

Soit $f \in R_n[X]$ ($R_n[X] = \{f \in R[X], \deg f \leq n\}$). On définit :

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1°) Montrer que B_n est un endomorphisme de $R_n[X]$.

2°) a. Calculer $B_n(1)$.

b. Si $g \in R_n[X]$, calculer l'expression : $h = \frac{1}{n} X(1-X) (B_n(g))'$.

Donner alors une relation simple entre $B_n(Xg)$, $XB_n(g)$ et h .

c. En déduire $B_n(X)$ et $B_n(X^2)$ puis $B_n(X^3)$ (sous forme polynômiale !)

3°) a. On rappelle l'expression d'un polynôme de Lagrange : $L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{X - x_i}{x_j - x_i}$

On considère les polynômes $(L_j)_{j \in [0, n]}$ tels que $L_j\left(\frac{i}{n}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$.

Montrer qu'ils forment une base de $R_n[X]$.

b. Calculer $B_n(L_i)$: montrer que la famille $(B_n(L_i))_{i \in [0, n]}$ est libre.

c. En déduire que B_n est un isomorphisme de $R_n[X]$.

4°) a. $n = 2$: calculer $B_2^{-1}(1)$, $B_2^{-1}(X)$ et $B_2^{-1}(X^2)$.

b. On veut généraliser ce résultat à n quelconque : on sait que

$X^k = X^k((1-X)+X)^{n-k}$ (porte ouverte !). Exprimer X^k en fonction des $B_n(L_{i+k})$.

en déduire la formule : $B_n^{-1}(X^k) = \frac{1}{C_n^k} \sum_{i=0}^{n-k} C_{k+i}^i L_{k+i}$.

(B_n^{-1} est une application linéaire, et $B_n^{-1}(B_n(L_{k+i})) = L_{k+i}$!)

Idée du barème : Exercice I : 4 1°1,5 2°1,5 Exercice II : 4 1°1,5 2°2,5

Problème : 12 1°0,5 2°4 3°3,5 4°4.

+ Compléments au doc.