

Exercice I :

1°. Les racines de $P = X^2 + X + 1$ sont j et j^2 (elles sont conjuguées).

Pour montrer que $P \mid Q = (X+1)^m - X^m - 1$ il suffit d'avoir $Q(j) = 0$.

$Q(j) = (j^2)^m - j^m - 1$. En étudiant la congruence de m modulo 6, on trouve : $P \mid Q \Leftrightarrow m \equiv \pm 1 [6]$.

2°. $p' = 3x^2 - 6x$: ses racines sont : 0 et 2 ; pour que p admette des racines multiples, il faut et il suffit que 0 ou 2 soient racines de p .

$p(0) = 0 \Leftrightarrow a = -2$: Les racines de p sont donc : (0, 0, 3).

$p(2) = 0 \Leftrightarrow a = 2$: Les racines de p sont donc : (2, 2, -1).

Exercice II :

1°. Par récurrence, on trouve : $P_n = 1 + X^2 + \dots + X^{2n}$.

2°. Si a est racine de P_n , $a^2 \neq 1$ (!) ; donc :

$$P_n(a) = 0 \Leftrightarrow (1-a^2) P_n(a) = 0 \Leftrightarrow 1 - a^{2n+2} = 0 \Leftrightarrow a^{2n+2} = 1.$$

D'où les racines de P_n : $a = e^{i \frac{2k\pi}{n+1}}$: $k \in [-n, +n] - \{0\}$.

Problème :

1°. Evident !

$$2°. a). B_n(1) = [X + (1-X)]^n = 1.$$

$$b). (B_n(g))' = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) [k X^{k-1} (1-X)^{n-k} - (n-k) X^k (1-X)^{n-k-1}].$$

$$\begin{aligned} c). X(1-X)(B_n(g))' &= \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} [k(1-X) - (n-k)X] \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \times k}_{\alpha} - \underbrace{\sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k} \times n X}_{\beta}. \end{aligned}$$

Dans $\frac{\alpha}{n}$, on reconnaît l'expression de $B_n(Xg)$ ($(Xg)\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} \cdot g\left(\frac{k}{n}\right)$).

et dans $\frac{\beta}{n}$, on met X et facteur et on trouve : $X B_n(g)$.

D'où : $R = B_n(Xg) - X B_n(g)$; ce qui va nous servir, c'est la relation :

$$B_n(Xg) = \frac{1}{n} X(1-X)^{\frac{n}{2}} X B_n(g);$$

en effet : $B_n(X) = X$ ($g=1$) ; $B_n(X^2) = \frac{1}{n} X(1-X) + X^2 = X^2(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} X$

$$\text{et } B_n(X^3) = X^3(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}) + 3X^2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}) + \frac{1}{n^2} X \quad (g=X).$$