

3°. a). Ici, l'expression d'un polynôme de Lagrange ne sert à rien; ce qui est important, c'est l'existence et le fait qu'ils forment une base.

b). $B_n(L_i) = C_n^i X^i (1-X)^{n-i}$

Pour montrer que la famille $B_n(L_i)$ est libre, on raisonne sur les valeurs car: $\text{val}(B_n(L_i)) = i$.

c). L'image d'une base par B_n est une base, donc B_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (On aurait pu montrer aussi que $\text{Ker } B_n = \{0\}$).

4°. a). $n=2$: $B_2(1)=1$, $B_2(X)=X$, $B_2(X^2)=\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$.

donc: $B_2^{-1}(1)=1$, $B_2^{-1}(X)=X$ et $B_2^{-1}(B_2(X^2))=X^2 = \frac{1}{2}B_2^{-1}(X^2) + \frac{1}{2}X$

d'où: $B_2^{-1}(X^2)=2X^2-X$.

b). Par le théorème $\Rightarrow X^k = X^k \cdot \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i X^i (1-X)^{n-k-i}$

D'où: $X^k = \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i \frac{1}{C_n^{i+k}} B_n(L_{i+k})$ (car $B_n(L_{i+k}) = C_n^{i+k} X^{i+k} (1-X)^{n-i-k}$)

On a: $C_{n-k}^i / C_n^{i+k} = \frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!} \times \frac{(i+k)!(n-i-k)!}{n!} = \frac{(n-k)! k!}{n!} \times \frac{(i+k)!}{i! k!} = \frac{1}{C_n^k} \times C_n^i$

On obtient ainsi la relation en reprenant B_n^{-1} dans l'égalité ci-dessus

5°. Complément:

a). $\Delta^2 y_p = y_{p+2} - 2y_{p+1} + y_p$; $\Delta^3 y_p = y_{p+3} - 3y_{p+2} + 3y_{p+1} - y_p$

et d'une façon plus générale; on montre par récurrence que:

$$\Delta^m y_p = \sum_{e=0}^m C_m^e (-1)^{m+e} y_{p+e}$$

b). Pour $n=2$, on a: $B_2(f) = f(0)(1-X)^2 + 2f(\frac{1}{2})X(1-X) + f(1)X^2$.

$$= f(0) + 2X[f(\frac{1}{2}) - f(0)] + X^2[f(1) - 2f(\frac{1}{2}) + f(0)]$$

$$= \Delta^0 f(0) + 2X \Delta f(0) + X^2 \Delta^2 f(0)$$

n quelconque: on a: $B_n(f) = \sum_{k=0}^n C_n^k f(\frac{k}{n}) \cdot X^k \sum_{i=0}^{n-k} C_{n-k}^i (-1)^i X^i$

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_n^k C_{n-k}^i X^{k+i} \quad : \text{ cherchons le coef. de } X^m : A_m$$

On doit avoir $k+i=m$: $k \in [0, m]$ et $i = m-k$

$$\Rightarrow A_m = \sum_{k=0}^m C_n^k C_{n-k}^{m-k} (-1)^{m-k} \quad \text{Or: } C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_n^m C_m^k \text{ d'où:}$$

$$A_m = C_n^m \sum_{k=0}^m C_m^k (-1)^{m-k} f(\frac{k}{n}) \Rightarrow A_m = C_n^m \Delta^m y_0 = C_n^m \Delta^m f(0)$$

$(-1)^{m+k} y_k$ On trouve bien l'expression proposée de $B_n(f)$.