

Exercice I : rappeler le th. des A.F. pour un intervalle du type $]a, a+h[$.

1°) Soit la fonction $x \mapsto x^{3/2}$; calculer Θ dans les 2 cas suivants :

a. $a=0$ et h positif ; b. $a=1$ et $h=1$

2°) Donner l'expression de Θ dans le cas de la fonction précédente, pour $a=1$ et h quelconque (mais convenable). Déterminer la limite de Θ quand $h \rightarrow 0$.

3°) Soit la fonction $x \mapsto |x|^{3/2}$; prouver que le th. des A.F. est applicable pour $a=1$ et $h=-3$ et calculer Θ correspondant.

N.B. : les valeurs seront calculées avec 3 décimales et une erreur inférieure à $5 \cdot 10^{-4}$.

Problème : (I) On considère la fonction $g(x) = \operatorname{Arctg} \frac{3x+7}{1-x} - \operatorname{Arctg} x$.

1°) Dresser le tableau de variation de g .

2°) En déduire la discussion de l'équation $g(x)=m$, m : réel quelconque.

3°) Résoudre cette équation dans les cas suivants :

a. $m=\pi/4$ b. $m=\pi/2$ c. $m=-5\pi/12$ d. $m=\operatorname{Arctg}(1/2) - \pi$

4°) Dans les cas où l'équation admet 2 solutions distinctes x_1 et x_2 , donner une relation simple, indépendante de m , entre x_1 et x_2 .

(II) f est une fonction numérique définie sur D_f , et systématiquement prolongée par continuité, lorsque c'est possible. Pour tout x de D_f , on pose $A(x) = f^{-1} \{f(x)\}$. Si $A(x)$ admet une borne supérieure, cette borne sera désignée par $\bar{F}(x)$; on peut ainsi définir une fonction $\bar{F}$ que l'on prolongera systématiquement par continuité (lorsque ce sera possible).

A) Exemples

1°) Vérifier que $\bar{F}$ n'est pas définie si f est périodique.

2°) Préciser $\bar{F}$ pour les deux fonctions suivantes: $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1/x^2$.

Etendre le résultat aux fonctions paires et strictement monotones dans $\mathbb{R}_+^*$.

3°) Etudier les variations de $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ et déterminer $\bar{F}$.

4°) Déterminer $\bar{F}$ lorsque f est la fonction étudiée au (I).

5°) Pour les ~~propositions~~ exemples précédents, comparer $\bar{F}$ et $\bar{f}$.

Question facultative: peut-on généraliser le résultat ainsi obtenu ?

B) soit la fonction $x \mapsto \frac{2x-1}{x^2(x-1)}$

1°) Donner son tableau de variation.

2°) Trouver l'expression de $\bar{F}$ suivant les différents intervalles; préciser $D_{\bar{F}}$; $\bar{F}$ est-elle dérivable sur $D_{\bar{F}}$? Calculer $\bar{F}(0)$ et $\bar{F}'(0)$.

C) On pose $f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{x-a_i}$ avec $a_1 < \dots < a_n$ et les $b_i > 0$

1°) tableau de variation de f ?

2°) Montrer que : $\forall i, \bar{F}(a_i) = a_n$.

3°) On pose $y=f(x)$, où $x=a_1+\Delta x$ (Δx suffisamment petit). On a $y=a_n+\Delta y$; on veut calculer la limite du rapport $\Delta x/\Delta y$, pour cela, on écrira $f(x)=A+B$ et $f(y)=A'+B'$ où A et A' sont des quantités qui ont une limite finie ($\Delta x \rightarrow 0$) et B et B' tendant vers l'infini. Comme $f(y)=f(x)$, on écrira que $\lim \frac{B}{B'} = 1$, puis on donnera la limite cherchée. Calculer $\bar{F}'(a_1)$.

Idée du barème : Exercice : 1°) 2°) 3°)

Problème : (I) 1°) 2°) 3°) 4°)

(II) A)

B)